ROTATIONS- UND SCHRAUBENFLÄCHEN KONSTANTER POSITIVER TOTAL-KRÜMMUNG SOWIE SOLCHE VON KONSTANTER MITTLERER KRÜMMUNG.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

VEREINIGTEN FRIEDRICHS-UNIVERSITÄT

HALLE-WITTENBERG

VORGELEGT VON

OBERLEHRER JOHANNES TREU

AUS **GARDELEGEN.**

HALLE A. S.

1913.

Referent: Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Wangerin.

Abschnitt I.

Totale und mittlere Krümmung. Satz von Bonnet über Parallelflächen.

Das Produkt und die Summe der beiden Hauptkrümmungen einer Fläche $\frac{1}{\varrho_1}$ und $\frac{1}{\varrho_2}$ werden bezüglich als totale und als mittlere Krümmung bezeichnet. Also

$$K = \frac{1}{\varrho_1} \cdot \frac{1}{\varrho_2}, \quad H = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}.^{*}$$

Berücksichtigt man, daß die Hauptkrümmungsradien ϱ_1 und ϱ_2 der quadratischen Gleichung:

$$(d \,.\, d'' - d'^2)\,\varrho^2 + (ed'' + gd - 2fd')\,\varrho + eg - f^2 = 0$$

genügen, so erhält man:

$$K = \frac{dd'' - d'^2}{eg - f^2}, \quad H = \frac{2fd' - ed'' - gd}{eg - f^2}.$$

Zu jeder gegebenen Fläche lassen sich also die Größen K und H finden, umgekehrt dienen aber auch die beiden letzten Gleichungen zur Bestimmung der Flächen, deren Totalkrümmnng oder deren mittlere Krümmung in jedem Punkte bekannt ist. Dem besonderen Werte $H = 0$ entsprechen bekanntlich Minimalflächen, während Flächen, die in allen Punkten die Totalkrümmung 0 besitzen, auf die Ebene abwickelbar sind. Auch für den Fall, daß K nicht verschwindet, wohl aber konstant ist, gelten noch allgemeine Sätze. Die durch die Gleichung $K = +\frac{1}{R^2}$ dargestellten Flächen, also die Flächen konstanter positiver Totalkrümmung, sind auf die Kugel vom Radius R folglich auch auf einander abwickelbar. Ferner ist mit der Bestimmung dieser Flächen auch diejenige der Flächen konstanter mittlerer Krümmung verbunden. Der Satz, der die Indentität der beiden Aufgaben erkennen läßt, ist von Bonnet aufgestellt. Er lautet:

Die beiden Flächen, die einer Fläche mit der Totalkrümmung $K = +\frac{1}{R^2}$ parallel und von ihr um R entfernt sind, haben die konstante mittlere Krümmung $H = \pm\frac{1}{R}$. Umgekehrt gibt es zu jeder Fläche konstanter mittlerer Krümmung eine Parallelfläche konstanter positiver Totalkrümmung.

Bezeichnen wir nämlich die Hauptkrümmungsradien einer Fläche S mit ϱ_1 und ϱ_2 sowie diejenigen einer zweiten Fläche Σ, die im Abstande R dazu parallel ist, mit r_1 und r_2, so erhält man nach bekannten Sätzen der Flächentheorie:

$$r_1 = \varrho_1 \pm R, \quad r_2 = \varrho_2 \pm R.$$

$$r_1 \mp R = \varrho_1, \quad r_2 \mp R = \varrho_2.$$

$$(r_1 \mp R)\,(r_2 \mp R) = \varrho_1 \cdot \varrho_2.$$ Oder, da $\varrho_1 \varrho_2 = R^2$ ist, so

$$(r_1 \mp R)\,(r_2 \mp R) = R^2.$$

$$r_1 r_2 \mp R(r_1 + r_2) = 0.$$

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \pm\frac{1}{R}.$$

---

* Bianchi: Differentialgeometrie (deutsch von Lukat). 2. Aufl. pag. 104.
Oft wird auch $\frac{1}{2}H$ als mittlere Krümmung bezeichnet.

Die Fläche Σ erhält also konstante mittlere Krümmung, und zwar wird diese positiv oder negativ, je nachdem R im Sinne oder im entgegengesetzten Sinne der Normalen auf diesen abgetragen wird. Dieser Zusammenhang der Flächen S und Σ tritt noch deutlicher hervor, wenn wir sie auf die Krümmungslinien beziehen. Dann hängt die Bestimmung der beiden Flächengattungen nur von einer Differentialgleichung ab

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial u_2^2} + \sinh\vartheta \, . \, \cosh\vartheta = o.^*$$

Jeder Lösung ϑ dieser Gleichung entsprechen zwei verschiedene Flächen S und $\overline{S}$ mit der Totalkrümmung $K = + \frac{1}{R^2}$. Ihre Linienelemente ds und $\overline{ds}$, bezogen auf die Krümmungslinien u_1 und u_2, sind gegeben durch:

$$ds^2 = R^2 (\sinh^2\vartheta \, . \, du_1^2 + \cosh^2\vartheta \, . \, du_2^2) \text{ für } S,$$
$$\overline{ds}^2 = R^2 (\cosh^2\vartheta \, . \, du_1^2 + \sinh^2\vartheta \, . \, du_2^2) \text{ für } \overline{S}.$$

Die Krümmungsradien durch:

$$\varrho_1 = R\coth\vartheta, \quad \varrho_2 = R\operatorname{tgh}\vartheta \text{ für } S,$$
$$\overline{\varrho_1} = R\operatorname{tgh}\vartheta, \quad \overline{\varrho_2} = R\coth\vartheta \text{ für } \overline{S}.$$

Ebenso gehören zu jeder Lösung ϑ dieser Gleichung zwei Paare von Flächen konstanter mittlerer Krümmung $H = \pm \frac{1}{R}$. Das Linienelement der Flächen nimmt die Form an:

$$ds^2 = R^2 e^{\pm 2\vartheta} (du_1^2 + du_2^2).$$

Die Hauptkrümmungsradien des ersten Paares haben die Werte:

$$r_1 = \frac{Re^{\pm\vartheta}}{\sinh\vartheta}, \quad r_2 = \frac{\pm Re^{\pm\vartheta}}{\cosh\vartheta},$$

während sich für das zweite Paar r_1 und r_2 mit einander vertauschen. Es ordnen sich also die Flächen konstanter positiver Totalkrümmung zu Flächenpaaren S und $\overline{S}$ an, die man als konjugiert bezeichnen kann. Wir haben somit für die Verbiegungsflächen der Kugel eine Transformation, welche die Hazzidakissche Transformation genannt wird. Die Eigenschaften derselben und ihre Beziehungen zu den Flächen konstanter mittlerer Krümmung werden in einem besonderen Kapitel erörtert werden.

Abschnitt II.

Ableitung der Rotations- und Schraubenflächen konstanter positiver Totalkrümmung sowie derjenigen mit konstanter mittlerer Krümmung aus der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial u_2^2} + \sinh\vartheta \, . \, \cosh\vartheta = o.$$

Da sich die Differentialgleichung $\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial u_2^2} + \sinh\vartheta \, . \, \cosh\vartheta = o$ nur unter beschränkenden Voraussetzungen integrieren läßt, nehmen wir zunächst an, daß ϑ nur von der einen Veränderlichen abhängt. Also $\vartheta = f(u_1)$. Dann wird $\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u_1^2} = \frac{d^2\vartheta}{du_1^2}$, $\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u_2^2} = o$,

$$\frac{d^2\vartheta}{du_1^2} + \sinh\vartheta \, . \, \cosh\vartheta = o.$$

* Bianchi, pag. 488 und pag. 490.

Setzt man $\frac{\partial\vartheta}{\partial u_1} = p$, so $\frac{1}{\partial u_1} = \frac{p}{\partial\vartheta}$, ferner $\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u_1^2} = \frac{\partial p}{\partial u_1} = p\frac{\partial p}{\partial\vartheta}$.

Folglich $p\partial p + \sinh\vartheta \,.\, \cosh\vartheta \,.\, \partial\vartheta = o.$

$$\frac{p^2}{2} = -\int \sinh\vartheta \,.\, \cosh\vartheta \,.\, \partial\vartheta + c, \qquad p^2 = -\int \sinh 2\vartheta \,.\, \partial\vartheta + c.$$

$$p^2 = -\frac{\cosh 2\vartheta}{2} + c. \qquad p = \pm\sqrt{c - \frac{\cosh 2\vartheta}{2}}.$$

Beschränken wir uns nur auf das — Zeichen, so erhalten wir:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial u_1} = -\sqrt{c - \frac{\cosh 2\vartheta}{2}} = -\sqrt{c - \frac{1}{2} - \sinh^2\vartheta},$$

$$\partial u_1 = -\frac{\partial\vartheta}{\sqrt{N^2 - \sinh^2\vartheta}}.$$

Wir führen nun elliptische Funktionen ein und setzen: $\sinh\vartheta = N \,.\, \mathrm{cn}\tau$. Daraus folgt:

$$\sqrt{N^2 - \sinh^2\vartheta} = N.\mathrm{sn}\tau,$$

$$\cosh^2\vartheta = 1 + N^2 - N^2\mathrm{sn}^2\tau = (1 + N^2) \,.\, \mathrm{dn}^2\tau, \quad \text{wo } \varkappa^2 = \frac{N^2}{1 + N^2}$$

$$\cosh\vartheta \,.\, \partial\vartheta = -N \,.\, \mathrm{sn}\tau \,.\, \mathrm{dn}\tau\, \partial\tau.$$

$$\partial\vartheta = -\frac{N.\mathrm{sn}\tau.\partial\tau}{\sqrt{1 + N^2}}.$$

$$\text{Schließlich } \partial u_1 = \frac{\partial\tau}{\sqrt{1 + N^2}}, \quad \tau = \sqrt{1 + N^2} \,.\, u_1.$$

Wir können also $\sinh\vartheta$ und $\cosh\vartheta$ und somit auch die Fundamentalgrößen durch den Parameter u_1 ausdrücken.

$$e = R^2 \,.\, \sinh^2\vartheta = R^2 \,.\, N^2 \,.\, \mathrm{cn}^2\tau, \quad f = o, \quad g = R^2\cosh^2\vartheta = R^2\,(1 + N^2)\,\mathrm{dn}^2\tau.$$

$$\varrho_1 = R\frac{\sqrt{1 + N^2}}{N} \,.\, \frac{\mathrm{dn}\tau}{\mathrm{cn}\tau}, \qquad \varrho_2 = R\frac{N}{\sqrt{1 + N^2}}\frac{\mathrm{cn}\tau}{\mathrm{dn}\tau}$$

Um die entsprechenden Werte für die konjugierte Fläche abzuleiten, haben wir nur e mit g und ϱ_1 mit ϱ_2 zu vertauschen. Die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung sind gegeben durch:

$$\mathfrak{d} = -\frac{e}{\varrho_2} = -RN\sqrt{1 + N^2} \,.\, \mathrm{cn}\tau \,.\, \mathrm{dn}\tau, \quad \mathfrak{d}' = o,$$

$$\mathfrak{d}'' = -\frac{g}{\varrho_1} = -RN\sqrt{1 + N^2} \,.\, \mathrm{cn}\tau \,.\, \mathrm{dn}\tau. \qquad \text{Also } \mathfrak{d} = \mathfrak{d}''.$$

Bezeichnen wir die Fundamentalgrößen der beiden Flächenpaare konstanter mittlerer Krümmung mit E, F, G, D, D′, D″, so erhalten wir für das erste Paar folgende Werte:

$$E = G = R^2 e^{\pm 2\vartheta} = R^2(\cosh\vartheta \pm \sinh\vartheta)^2 = R^2(\sqrt{1 + N^2} \,.\, \mathrm{dn}\tau \pm N \,.\, \mathrm{cn}\tau)^2$$

$$F = o$$

$$r_1 = \frac{Re^{\pm\vartheta}}{\sinh\vartheta} = \frac{R(\cosh\vartheta \pm \sinh\vartheta)}{\sinh\vartheta} = \frac{R(\sqrt{1 + N^2} \,.\, \mathrm{dn}\tau \pm N \,.\, \mathrm{cn}\tau)}{N \,.\, \mathrm{cn}\tau}$$

$$r_2 = \pm\frac{Re^{\pm\vartheta}}{\cosh\vartheta} = \pm\frac{R(\cosh\vartheta \pm \sinh\vartheta)}{\cosh\vartheta} = \pm\frac{R(\sqrt{1 + N^2}\mathrm{dn}\tau \pm N\mathrm{cn}\tau)}{\sqrt{1 + N^2} \,.\, \mathrm{dn}\tau},$$

während sich für das zweite Paar r_1 und r_2 mit einander vertauschen.

$$D = -\frac{E}{r_2} = \mp R\sqrt{1 + N^2}.\mathrm{dn}\tau.(\sqrt{1 + N^2}\mathrm{dn}\tau \pm N \,.\, \mathrm{cn}\tau)$$

$$D' = o.$$

$$D'' = -\frac{G}{r_1} = -R\,N \,.\, \mathrm{cn}\tau\,(\sqrt{1 + N^2}\mathrm{dn}\tau \pm N\mathrm{cn}\tau).$$

Auch D und D″ vertauschen sich für das zweite Paar.

Wir wollen nun die Aufgabe verallgemeinern und eine Lösung ϑ unserer Differentialgleichung suchen, welche eine lineare Funktion der Veränderlichen u_1 und u_2 ist. Also $\vartheta = f(au_1 + bu_2 + c)$. Setzt man $au_1 + bu_2 + c = \varepsilon$, so $\frac{\partial^2\vartheta}{\partial {u_1}^2} = a^2\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\varepsilon^2}$, $\frac{\partial^2\vartheta}{\partial {u_2}^2} = b^2\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\varepsilon^2}$. Folglich

$$(a^2 + b^2)\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\varepsilon^2} + \sinh\vartheta \,.\, \cosh\vartheta = o.$$

Durch eine der vorigen ähnliche Methode ergibt sich die Lösung:

$$\varepsilon = -\int\frac{\partial\vartheta}{\sqrt{C_1 - \frac{\cosh 2\vartheta}{2(a^2 + b^2)}}} = -\int\frac{\partial\vartheta}{\sqrt{C_2 - \frac{\sinh^2\vartheta}{a^2 + b^2}}}$$

$\frac{\varepsilon}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\int\frac{\partial\vartheta}{\sqrt{N^2 - \sinh^2\vartheta}}$. Setzt man auch hier wieder $\sinh\vartheta = N \,.\, \mathrm{cn}\tau$,

so wird $\tau = \sqrt{\frac{1 + N^2}{a^2 + b^2}} \,.\, \varepsilon = \sqrt{1 + N^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \,.\, u_1 + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \,.\, u_2 + c\right)$.

Ohne der Allgemeinheit zu schaden, kann man $c = o$ annehmen; auch kann man einführen:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin\sigma, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos\sigma.$$

$$\text{Also} \quad \tau = \sqrt{1 + N^2}(u_1 \,.\, \sin\sigma + u_2 \cos\sigma).$$

Vergleicht man damit die erste Lösung $\tau = \sqrt{1 + N^2} \,.\, u_1$, in der nur die eine Veränderliche auftritt, so überzeugt man sich leicht, daß auch das letzte Resultat unmittelbar aus dieser ersten Lösung abgeleitet werden kann, wenn man »u_1« durch »$u_1 \,.\, \sin\sigma + u_2 \,.\, \cos\sigma$« ersetzt. Ist also $\vartheta = \vartheta(u_1)$ eine Lösung der Differentialgleichung, so genügt ihr auch die Funktion $\Theta = \vartheta(u_1 \,.\, \sin\sigma + u_2 \,.\, \cos\sigma)$. Dieses letzte Resultat entspricht der Bonnet-Lieschen Transformation. Auf die Bedeutung derselben werden wir noch bei einer anderen Gelegenheit zurückkommen.

In derselben Weise folgen auch die Fundamentalgrößen der Flächen $\Theta = \vartheta(u_1 \,.\, \sin\sigma + u_2 \,.\, \cos\sigma)$ aus denjenigen der Flächen $\vartheta = \vartheta(u_1)$, indem wir überall an Stelle von »u_1« »$u_1 \,.\, \sin\sigma + u_2 \,.\, \cos\sigma$« einführen. Diese Fundamentalgrößen besitzen bemerkenswerte Eigenschaften. Zunächst fällt auf, daß die Fundamentalgrößen E und G der Flächen konstanter mittlerer Krümmung einander gleich sind. Also sind ihre Krümmungslinien isometrische Linien, ein Satz, der bekanntlich für alle Flächen konstanten mittlerer Krümmung gilt. Zweitens haben wir zu beachten, daß sämtliche Fundamentalgrößen nur von der einen Veränderlichen abhängen, wenn ϑ Funktion von u_1 allein ist. In diesem Falle lassen die erste und die zweite Grundform die stetige Transformation in sich zu:

$$\overline{u_1} = u_1, \quad \overline{u_2} = u_2 + c.$$

*Die Flächen erlauben also eine stetige Bewegung in sich, sie sind folglich Schraubenflächen, zu denen auch als Spezialfall die Rotationsflächen gehören. Offenbar entsprechen den Werten $u_1 = c$ Schraubenlinien, während die Gleichungen $u_2 = c$ die Achsenschnitte darstellen. Die Parameterkurven u_1 und u_2 sind aber orthogonal, wie aus der Gleichung $f = o$ hervorgeht. Folglich schneiden die Schraubenlinien $u_1 = c$ die Achsenschnitte $u_2 = c$ senkrecht, die stetige Bewegung besteht allein in einer Drehung der Flächen um eine feste Achse; es können also diese nur Rotationsflächen sein.

Wird nun zweitens ϑ eine lineare Kombination der Veränderlichen, so gilt dasselbe auch für die Fundamentalgrößen. Man kann aber auch in diesem Falle durch Einführung neuer Variabelen erreichen, daß die Fundamentalgrößen nur von einer Veränderlichen abhängen. Allerdings werden die neuen Parameterkurven nicht mehr senkrecht auf einander stehen, so daß in diesem Falle nur Schraubenflächen möglich sind. Die durch die Gleichung $\vartheta = \vartheta(u_1)$ bestimmten Flächen sind also Rotationsflächen, der Lösung $\Theta = \vartheta(u_1 \,.\, \sin\sigma + u_2 \,.\, \cos\sigma)$ entsprechen dagegen Schraubenflächen.

Um aus den Fundamentalgrößen die endlichen Gleichungen der Flächen abzuleiten, haben wir nur das System partieller Differentialgleichungen zu integrieren, welchen die Kosinus der drei Richtungen des Hauptttrieders genügen.

* Bianchi, pag 201.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial X_1}{\partial u_1} = -\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial u_2} \,.\, X_2 + \dfrac{D}{\sqrt{E}} \,.\, X_3\,, \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial u_2} = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u_1} \,.\, X_2\,,\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{\partial X_2}{\partial u_1} = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial u_2} \,.\, X_1\,, \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial u_2} = -\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u_1} \,.\, X_1 + \dfrac{D''}{\sqrt{G}} \,.\, X_3\,,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial X_3}{\partial u_1} = -\dfrac{D}{\sqrt{E}} \,.\, X_1\,, \\ \dfrac{\partial X_3}{\partial u_2} = -\dfrac{D''}{\sqrt{G}} \,.\, X_2\,.\end{cases}$$

Sind X_1, X_2, X_3; Y_1, Y_2, Y_3; Z_1, Z_2, Z_3 drei Lösungssysteme und stellen diese die Koeffizienten einer orthogonalen Substitution dar, so lauten die Gleichungen der Fläche:

$$x = \int\left(\sqrt{E}\,X_1 \partial u_1 + \sqrt{G}\,X_2 \partial u_2\right), \quad y = \int\left(\sqrt{E}\,Y_1 \partial u_1 + \sqrt{G}\,Y_2 \partial u_2\right),$$

$$z = \int\left(\sqrt{E} Z_1 \partial u_1 + \sqrt{G} Z_2 \partial u_2\right).$$

Wir wollen diese Methode anwenden, um die Rotationsflächen konstanter mittlerer Krümmung abzuleiten. Führt man an Stelle von u_1 und u_2 die Veränderlichen τ und υ ein durch die Gleichungen $u_1 = \dfrac{\tau}{\sqrt{1+N^2}}$, $u_2 = \dfrac{\upsilon}{N}$, so sind die Fundamentalgrößen dieser Flächen gegeben durch:

$$E = \frac{R^2}{1+N^2}\left(\sqrt{1+N^2}\,\mathrm{dn}\tau \pm N\,\mathrm{cn}\tau\right)^2, \quad F = 0, \quad G = \frac{R^2}{N^2}\left(\sqrt{1+N^2}\,\mathrm{dn}\tau \pm N\,\mathrm{cn}\tau\right)^2,$$

$$D = \mp\frac{R}{\sqrt{1+N^2}}\,\mathrm{dn}\tau\left(\sqrt{1+N^2}\,\mathrm{dn}\tau \pm N\,\mathrm{cn}\tau\right), \quad D' = 0, \quad D'' = -\frac{R}{N}\mathrm{cn}\tau\left(\sqrt{1+N^2}\,\mathrm{dn}\tau \pm N\,\mathrm{cn}\tau\right).$$

Setzt man diese Werte in die partiellen Differentialgleichungen ein, so erhält man:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial X_1}{\partial\tau} = \pm\,\mathrm{dn}\tau X_3\,, \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial\upsilon} = \mp\,\mathrm{sn}\tau X_1\,,\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{\partial X_2}{\partial\tau} = 0\,, \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial\upsilon} = \pm\,\mathrm{sn}\tau X_1 - \mathrm{cn}\tau X_3\,,\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{\partial X_3}{\partial\tau} = \pm\,\mathrm{dn}\tau X_1 \\ \dfrac{\partial X_3}{\partial\upsilon} = +\,\mathrm{cn}\tau X_2.\end{cases}$$

Drei Systeme von partikulären Integralen lassen sich leicht finden, nämlich:

$$\begin{aligned} X_1 &= \mp\,\mathrm{sn}\tau\,.\,\cos\upsilon, & Y_1 &= \mp\,\mathrm{sn}\tau\,.\,\sin\upsilon, & Z_1 &= \pm\,\mathrm{cn}\tau, \\ X_2 &= -\sin\upsilon, & Y_2 &= +\cos\upsilon, & Z_2 &= 0, \\ X_3 &= +\,\mathrm{cn}\tau\,.\,\cos\upsilon, & Y_3 &= +\,\mathrm{cn}\tau\,.\,\sin\upsilon, & Z_3 &= +\,\mathrm{sn}\tau. \end{aligned}$$

Da ferner $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1$, $X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0$, u. s. w., so dürfen wir ansetzen:

$$x = \int\frac{R}{\sqrt{1+N^2}}\left(\sqrt{1+N^2}\,\mathrm{dn}\tau \pm N\mathrm{cn}\tau\right)\left(\mp\,\mathrm{sn}\tau\,\cos\upsilon\right)\partial\tau$$

$$+ \int\frac{R}{N}\left(\sqrt{1+N^2}\,\mathrm{dn}\tau \pm N\,.\,\mathrm{cn}\tau\right)\left(-\sin\upsilon\right)\partial\upsilon.$$

Die Integration gibt: $x = \dfrac{R}{N}\left(\sqrt{1+N^2}\,\mathrm{dn}\tau \pm N\,\mathrm{cn}\right)\cos\upsilon.$

Ebenso $y = \dfrac{R}{N}\left(\sqrt{1+N^2}\,\mathrm{dn}\tau \pm N\mathrm{cn}\tau\right).\,\sin\upsilon,$

$$z = \pm\frac{R}{\sqrt{1+N^2}}\cdot\int\left(\sqrt{1+N^2}\,\mathrm{dn}\tau \pm N\mathrm{cn}\tau\right).\,\mathrm{cn}\tau\,.\,\partial\tau.$$

Durch die Substitution: $\dfrac{R}{N}\left(\sqrt{1+N^2}\,\mathrm{dn}\tau \pm N\,.\,\mathrm{cn}\tau\right) = r$ gehen die Gleichungen schließlich über in:

$$x = r\cos\vartheta,$$
$$y = r\,.\,\sin\vartheta,$$
$$z = \mp\int\frac{\left(r^2 - \frac{R^2}{N^2}\right)\partial r}{\sqrt{\left[\left(R + R\frac{\sqrt{1+N^2}}{N}\right)^2 - r^2\right].\left[r^2 - \left(R - R\frac{\sqrt{1+N^2}}{N}\right)^2\right]}}.$$

In ähnlicher Weise könnte man auch die konjugierte Fläche ableiten, doch wollen wir die Rechnung nicht noch einmal wiederholen und an dieser Stelle nur ihre Gleichungen angeben:

$$x = r\cos\vartheta,$$
$$y = r\,.\,\sin\vartheta,$$
$$z = \mp\int\frac{\left(r^2 + \frac{R^2}{1+N^2}\right)\partial r}{\sqrt{\left[\left(R + R\frac{N}{\sqrt{1+N^2}}\right)^2 - r^2\right].\left[r^2 - \left(R - R\frac{N}{\sqrt{1+N^2}}\right)^2\right]}}.$$

Zur Bestimmung der Schraubenflächen kann diese Methode ebenfalls dienen. Das eine Lösungssystem der partiellen Differentialgleichungen läßt sich auch in diesem Falle unmittelbar erkennen. Um aber die beiden anderen zu finden, müßte man die partiellen Differentialgleichungen zurückführen auf eine totale Differentialgleichung. Doch würde die Zurückführung auf eine solche Gleichung und besonders die Auflösung derselben mit so erheblichen Rechnungen verbunden sein, daß sich dieser Weg nicht empfiehlt. Wir wählen darum noch eine andere Methode, die im wesentlichen in einer Transformation der Fundamentalgrößen besteht. Als vorbereitendes Beispiel mag zuerst die Ableitung der Rotationsflächen konstanter positiver Totalkrümmung folgen.

Die simultanen Gleichungen der Rotationsflächen lauten:

$$x = \varrho\cos\vartheta, \qquad y = \varrho\sin\vartheta, \qquad z = \varphi(\varrho).$$

Also müssen sich die Fundamentalgrößen sämtlicher Rotationsflächen auf die Form bringen lassen:

$$e_1 = 1 + \varphi'^2(\varrho), \qquad f_1 = o, \qquad g_1 = \varrho^2$$
$$\partial_1 = \frac{\varphi''(\varrho)}{\sqrt{1+\varphi'^2(\varrho)}}, \qquad \partial_1' = o, \qquad \partial_1'' = \frac{\varrho\varphi'(\varrho)}{\sqrt{1+\varphi'^2(\varrho)}}.$$

Sind wir nun imstande, die Fundamentalgrößen e, f, g, ∂, ∂', ∂'' der gesuchten Flächen, von denen wir schon wissen, daß sie Rotationsflächen sind, so zu transformieren, daß sie ebenso wie e_1, f_1, g_1, ∂_1, ∂_1', ∂_1'' nur von der einen Veränderlichen ϱ und dem ersten und zweiten Differentialquotienten einer Funktion $\varphi(\varrho)$ abhängen, so stellt die Gleichung $z = \varphi(\varrho)$ die Meridiankurve der Rotationsfläche dar. Das Linienelement besitzt nun in unserem Falle den Wert:

$$\partial s^2 = R^2(N^2\,cn^2\tau\partial u_1{}^2 + (1+N^2)\,\partial u^2\tau\,\partial u_2{}^2), \text{ wo } \tau = \sqrt{1+N^2}u_1.$$

Setzt man noch $Nu_2 = \vartheta$, so $\partial s^2 = R^2\left(\frac{N^2}{1+N^2}\,cn^2\tau\,\partial\tau^2 + \frac{1+N^2}{N^2}\,.\,\partial n^2\tau\,.\,\partial\vartheta^2\right)$.

Schließlich substituieren wir $R\frac{\sqrt{1+N^2}}{N}\,.\,\partial n\tau = \varrho$ und erhalten

$$\partial s^2 = \frac{R^2\,\partial\varrho^2}{R^2\frac{1+N^2}{N^2} - \varrho^2} + \varrho^2\,\partial\vartheta^2 = (1+\varphi'^2(\varrho))\,\partial\varrho^2 + \varrho^2\partial\vartheta^2,$$

wenn $\varphi'(\varrho) = \mp\sqrt{\dfrac{R^2 - R^2\frac{1+N^2}{N^2} + \varrho^2}{R^2\frac{1+N^2}{N^2} - \varrho^2}}$ gesetzt wird.

Also $e = 1 + \varphi'^2(\varrho) = e_1$, $f = o = f_1$, $g = \varrho^2 = g_1$, ebenso wird $\partial = \partial_1$, $\partial' = \partial_1' = o$, $\partial'' = \partial_1''$.

Folglich die Gleichungen der gesuchten Rotationsfläche

$$x = \varrho \,.\, \cos\vartheta,$$
$$y = \varrho \,.\, \sin\vartheta,$$
$$z = \mp \int \sqrt{\frac{R^2 - R^2\frac{1+N^2}{N^2} + \varrho^2}{R^2\frac{1+N^2}{N^2} - \varrho^2}} \,.\, \partial\varrho.$$

Durch eine ähnliche Rechnung erhält man die Gleichungen der konjugierten Fläche:

$$x = \varrho \cos\vartheta,$$
$$y = \varrho \sin\vartheta,$$
$$z = \mp \int \sqrt{\frac{R^2 - R^2\frac{N^2}{1+N^2} + \varrho^2}{R^2\frac{N^2}{1+N^2} - \varrho^2}} \,.\, \partial\varrho.$$

Wir kommen nnn zu unserer wichtigsten Aufgabe, zur Ableitung der Schraubenflächen. Für sämtliche Schraubenflächen gelten die simultanen Gleichungen

$$x = \varrho \cos\vartheta, \quad y = \varrho \sin\vartheta, \quad z = m \,.\, \vartheta + \varphi(\varrho), \text{ wo } z = \varphi(\varrho)$$

die Gleichung des Achsenschnittes und m den Parameter der Schraubung darstellen. Für $m = o$ gehen die Schraubenflächen in die Rotationsflächen über. Wir bilden:

$$\frac{\partial x}{\partial \varrho} = \cos\vartheta, \qquad \frac{\partial y}{\partial \varrho} = \sin\vartheta, \qquad \frac{\partial z}{\partial \varrho} = \varphi'(\varrho),$$
$$\frac{\partial x}{\partial \vartheta} = -\varrho \sin\vartheta, \qquad \frac{\partial y}{\partial \vartheta} = \varrho \cos\vartheta, \qquad \frac{\partial z}{\partial \vartheta} = m,$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial \varrho^2} = o, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial \varrho^2} = o, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial \varrho^2} = \varphi''(\varrho),$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial \varrho \partial \vartheta} = -\sin\vartheta, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial \varrho \partial \vartheta} = \cos\vartheta, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial \varrho \partial \vartheta} = o,$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta^2} = -\varrho \cos\vartheta, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial \vartheta^2} = -\varrho \sin\vartheta, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial \vartheta^2} = o.$$

$$e = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial \varrho}\right)^2 = 1 + \varphi'^2(\varrho), \quad f = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial \varrho}\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right) = m\varphi'(\varrho), \quad g = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right)^2 = \varrho^2 + m^2.$$

$$X = \frac{1}{\sqrt{eg - f^2}} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \varrho} & \frac{\partial z}{\partial \varrho} \\ \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix}, \quad Y = \frac{1}{\sqrt{eg - f^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial \varrho} & \frac{\partial x}{\partial \varrho} \\ \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \end{vmatrix}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{eg - f^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varrho} & \frac{\partial y}{\partial \varrho} \\ \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{vmatrix}.$$

$$eg - f^2 = (\varrho^2 + m^2)(1 + \varphi'^2(\varrho)) - m^2\varphi'^2(\varrho) = \varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho).$$

$$X = \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}} \cdot \left[m \sin\vartheta - \varrho \cos\vartheta \,.\, \varphi'(\varrho)\right],$$
$$Y = \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}} \cdot \left[-\varrho \sin\vartheta\, \varphi'(\varrho) - m\cos\vartheta\right],$$
$$Z = \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}} \left[\varrho \cos^2\vartheta + \varrho \sin^2\vartheta\right] = \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}}.$$

$$\mathfrak{d} = \Sigma\left(X\frac{\partial^2 x}{\partial \varrho^2}\right) = \frac{\varrho\, \varphi''(\varrho)}{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2 \,.\, \varphi'^2(\varrho)}}, \quad \mathfrak{d}' = \Sigma\left(X\frac{\partial^2 x}{\partial \varrho \partial \vartheta}\right) = -\frac{m}{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}},$$
$$\mathfrak{d}'' = \Sigma\left(X\frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta^2}\right) = \frac{\varrho^2\, \varphi'(\varrho)}{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}}.$$

Auf diese Form müssen also die Fundamentalgrößen der gesuchten Schraubenflächen zurückgeführt werden. Wir beginnen mit den Flächen konstanter positiver Totalkrümmung. Ihr Linienelement ist gegeben durch: $\partial s^2 = R^2\,(N^2 cn^2\tau \partial u_1{}^2 + (1 + N^2)\, \partial u^2\tau \partial u_2{}^2)$, wo $\tau = \sqrt{1 + N^2(u_1 \sin\sigma + u_2 \cos\sigma)}$.

Um eine möglichst übersichtliche Rechnung zu erreichen, ist es nötig, statt der Konstanten N und σ drei neue Größen A, B und C einzuführen, von der Beschaffenheit,

$$\text{daß } N^2 = \frac{C - B}{A + B} \text{ und } \sin\sigma = \sqrt{\frac{B\,(C + A)}{C\,(A + B)}} \text{ wird.}$$

Zwischen den drei Konstanten A, B und C können wir also noch eine willkürliche Beziehung aufstellen, wir werden im Laufe der Rechnung in passender Weise darüber verfügen. Aus den beiden angeführten Gleichungen folgt ferner:

$$1 + N^2 = \frac{A + C}{A + B},\quad \varkappa^2 = \frac{N^2}{1 + N^2} = \frac{C - B}{A + C},\quad \cos\sigma = \sqrt{\frac{A\,(C - B)}{C\,(A + B)}}.$$

Der Einfachheit halber haben wir vorausgesetzt, daß $\sin\sigma$ und $\cos\sigma$ positiv sind, auch N und $\sqrt{1 + N^2}$ sollen positive Größen darstellen. Dann wird

$$ds^2 = \frac{R^2}{A + B}\left[(C - B)\,\mathrm{cn}^2\tau\, du_1^2 + (A + C)\,\mathrm{dn}^2\tau\, du_2^2\right].$$

$$\tau = \sqrt{\frac{A + C}{A + B}}\cdot\left[\sqrt{\frac{B\,(A + C)}{C\,(A + B)}}\cdot u_1 + \sqrt{\frac{A\,(C - B)}{C\,(A + B)}}\cdot u_2\right]$$

$$= \frac{1}{(A + B)\cdot\sqrt{C}}\left[(A + C)\sqrt{B}\cdot u_1 + \sqrt{A\,(C - B)\,(A + C)}\cdot u_2\right].$$

Wir wollen nunmehr die Parameter u_1 und u_2 durch zwei neue Veränderliche ϱ und υ ausdrücken:

$$u_1 = -\sqrt{\frac{C\cdot B}{A + C}}\cdot\int\sqrt{\frac{\varrho^2 + A}{(\varrho^2 - B)\,(C - \varrho^2)}}\,\frac{d\varrho}{\varrho} - \frac{1}{R}\sqrt{\frac{A}{C}(C - B)}\cdot\upsilon.$$

$$u_2 = -\sqrt{\frac{C\cdot A}{C - B}}\cdot\int\sqrt{\frac{\varrho^2 - B}{(\varrho^2 + A)\,(C - \varrho^2)}}\,\frac{d\varrho}{\varrho} + \frac{1}{R}\sqrt{\frac{B}{C}(A + C)}\cdot\upsilon.$$

Dann wird:

$$\tau = \sqrt{\frac{B}{C}\,\frac{A + C}{A + B}}\,u_1 + \sqrt{\frac{A}{C}}\cdot\frac{\sqrt{(C - B)\,(A + C)}}{A + B}\cdot u_2 =$$

$$-\frac{B\sqrt{A + C}}{A + B}\cdot\int\sqrt{\frac{\varrho^2 + A}{(\varrho^2 - B)\,(C - \varrho^2)}}\,\frac{d\varrho}{\varrho} - \frac{A\sqrt{A + C}}{A + B}\int\sqrt{\frac{\varrho^2 - B}{(\varrho^2 + A)\,(C - \varrho^2)}}\,\frac{d\varrho}{\varrho}.$$

$$\text{Also}\quad \tau = -\int\frac{\sqrt{A + C}\cdot\varrho\cdot d\varrho}{\sqrt{(C - \varrho^2)\,(\varrho^2 + A)\,(\varrho^2 - B)}}.$$

Durch Einführung elliptischer Funktionen folgt unmittelbar:

$$\sqrt{C - B}\cdot\mathrm{cn}\,\tau = \sqrt{\varrho^2 - B},\quad \sqrt{C - B}\cdot\mathrm{sn}\,\tau = \sqrt{C - \varrho^2},\quad \sqrt{A + C}\,\mathrm{dn}\,\tau = \sqrt{\varrho^2 + A}.$$

Für das Linienelement erhält man: $ds^2 = \frac{R^2}{A + B}\left[(\varrho^2 - B)\,du_1^2 + (\varrho^2 + A)\,du_2^2\right]$. Bezeichnen wir nun die neuen Fundamentalgrößen, in welchen die alten durch die Substitution übergehen, mit e_1, f_1, g_1, d_1, d_1', d_1'', so finden wir durch elementare Rechnung:

$$g_1 = \varrho^2 + \frac{A\cdot B}{C},\quad f_1 = -R\sqrt{\frac{A\cdot B}{(C - B)\,(A + C)}}\,\frac{1}{\varrho}\sqrt{\frac{(\varrho^2 + A)\,(\varrho^2 - B)}{C - \varrho^2}}.$$

Nehmen wir schließlich an, daß $(C - B)\,(A + C) = CR^2$, so wird

$$f_1 = -\sqrt{\frac{A\cdot B}{C}}\,\frac{1}{\varrho}\sqrt{\frac{(\varrho^2 + A)\,(\varrho^2 - B)}{C - \varrho^2}},\qquad e_1 = \frac{\varrho^2\,(A - B + C) - AB}{\varrho^2\,(C - \varrho^2)}.$$

Setzt man $-\frac{1}{\varrho}\sqrt{\frac{(\varrho^2 + A)\,(\varrho^2 - B)}{C - \varrho^2}} = \varphi'(\varrho)$, so erhält man: $e_1 = 1 + \varphi'^2(\varrho)$,

$$f_1 = \sqrt{\frac{A\cdot B}{C}}\,\varphi'(\varrho),\qquad g_1 = \varrho^2 + \frac{A\cdot B}{C}.$$

Wenn man noch für $\frac{A\cdot B}{C}$ die Größe m^2 einführt, so nimmt das Linienelement die Form an:

$\partial s^2 = (1 + \varphi'^2(\varrho))\, \partial\varrho^2 + 2\, m\varphi'(\varrho)\, \partial\varrho\, \partial\upsilon + (\varrho^2 + m^2)\, \partial\upsilon^2$. Ebenso sind die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung gegeben durch:

$$\partial_1 = \frac{\varrho\varphi''(\varrho)}{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}}, \quad \partial_1'' = \frac{\varrho^2\varphi'(\varrho)}{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}}, \quad \partial_1' = -\frac{m}{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}}.$$

Vergleicht man jetzt e_1, f_1, g_1, ∂_1, ∂_1', ∂_1'' mit den Fundamentalgrößen e, f, g, ∂, ∂', ∂'', die den Gleichungen $x = \varrho \cos \upsilon$, $y = \varrho \sin \upsilon$, $z = m\upsilon + \varphi(\varrho)$ entsprechen, so überzeugt man sich leicht, daß diese sechs Paare mit einander übereinstimmen. Also $e = e_1$, $f = f_1$, $g = g_1$, $\partial = \partial_1$, $\partial' = \partial_1'$, $\partial'' = \partial_1''$. Da, wie wir am Anfange des zweiten Abschnittes gezeigt hatten, unsere Flächen nur Schraubenflächen sein können, so ist die einzige Lösung: $x = \varrho \cos \upsilon$, $y = \varrho \sin \upsilon$, $z = m\upsilon + \varphi(\varrho)$, wo

$$\varphi(\varrho) = \pm \int \frac{\partial\varrho}{\varrho} \cdot \sqrt{\frac{(\varrho^2 + A)(\varrho^2 - B)}{C - \varrho^2}}.$$

Streng genommen durften wir in der letzten Gleichung nur das — Zeichen setzen. Doch würden wir für $\varphi'(\varrho)$ auch den positiven Wert erhalten, wenn wir am Anfange dieser Rechnung andere Vorzeichen gewählt hätten. Um die Rechnung vollständig durchzuführen, müssen wir noch A, B und C durch N und σ ausdrücken. Aus den Gleichungen:

$$N^2 = \frac{C - B}{A + B}, \quad \cos^2\sigma = \frac{A\,(C - B)}{C\,(A + B)}, \quad (C - B)\,(A + C) = R^2 \,.\, C \text{ folgt}$$

$$A = \frac{R^2\,(1 + N^2)\cos^2\sigma}{(N^2 + \cos^2\sigma)^2}, \quad B = \frac{R^2\, N^2 \sin^2\sigma}{(N^2 + \cos^2\sigma)^2}, \quad C = \frac{R^2\, N^2\,(1 + N^2)}{(N^2 + \cos^2\sigma)^2}.$$

Es sind also A, B und C reelle, positive Größen, die Konstante C ist immer größer als B. Ebenfalls wird $m = \pm \sqrt{\frac{A\,.\,B}{C}}$ eine reelle Größe. Für die späteren Betrachtungen ist es ferner vorteilhaft, die vier Konstanten A, B, C und m auf zwei, zum Beispiel auf C und m zurückzuführen. Berücksichtigt man die Gleichungen: $A \,.\, B = m^2C$, $(C - B)\,(A + C) = R^2 \,.\, C$, so findet man leicht:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(R^2 - C + m^2)^2 + 4\, Cm^2} + \frac{1}{2}(R^2 - C + m^2),$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(R^2 - C + m^2)^2 + 4\, Cm^2} - \frac{1}{2}(R^2 - C + m^2).$$

Es fehlen nun noch die konjugierten Flächen. Das Linienelement derselben besitzt den Wert: $\partial s^2 = R^2\,(N^2 cn^2\tau\, \partial u_2{}^2 + (1 + N^2)\, \partial u^2\tau\, \partial u_1{}^2)$, wo τ gegeben ist durch die Gleichung:

$$\tau = \sqrt{1 + N^2}(u_1 \sin\sigma + u_2 \cos\sigma).$$

Wir setzen in diesem Falle: $N^2 = \frac{C_1 - B_1}{A_1 + B_1}$, also $1 + N^2 = \frac{A_1 + C_1}{A_1 + B_1}$, $\varkappa^2 = \frac{C_1 - B_1}{A_1 + C_1}$. Ferner

$$\cos\sigma = \sqrt{\frac{B_1\,(A_1 + C_1)}{C_1\,(A_1 + B_1)}}, \text{ mithin } \sin\sigma = \sqrt{\frac{A_1\,(C_1 - B_1)}{C_1\,(A_1 + B_1)}},$$

$$\tau = \frac{1}{(A_1 + B_1)\sqrt{C_1}} \left[\sqrt{A_1\,(C_1 - B_1)\,(A_1 + C_1)} \,.\, u_1 + \sqrt{B_1}\,(A_1 + C_1) \,.\, u_2\right].$$

Substituiert man schließlich:

$$u_1 = -\sqrt{\frac{C_1 \,.\, A_1}{C_1 - B_1}} \cdot \int\sqrt{\frac{\varrho^2 - B_1}{(\varrho^2 + A_1)\,(C_1 - \varrho^2)}}\,\frac{\partial\varrho}{\varrho} + \frac{1}{R}\sqrt{\frac{B_1}{C_1}}\,(A_1 + C_1) \,.\, \upsilon,$$

$$u_2 = -\sqrt{\frac{C_1 \,.\, B_1}{A_1 + C_1}} \cdot \int\sqrt{\frac{\varrho^2 + A_1}{(\varrho^2 - B_1)\,(C_1 - \varrho^2)}}\,\frac{\partial\varrho}{\varrho} - \frac{1}{R}\sqrt{\frac{A_1}{C_1}}\,(C_1 - B_1) \,.\, \upsilon,$$

so findet man in derselben Weise wie vorher als Gleichungen der konjugierten Fläche:

$$x = \varrho \cos \upsilon,$$
$$y = \varrho \sin \upsilon,$$
$$z = m_1\upsilon \pm \int\sqrt{\frac{(\varrho^2 + A_1)\,(\varrho^2 - B_1)}{C_1 - \varrho^2}}\,\frac{\partial\varrho}{\varrho}.$$

Doch sind jetzt A_1, B_1 und C_1 durch die Gleichungen bestimmt:

$$A_1 = \frac{R^2\,(1 + N^2)\,\sin^2\sigma}{(N^2 + \sin^2\sigma)^2}, \qquad B_1 = \frac{R^2\,N^2\,\cos^2\sigma}{(N^2 + \sin^2\sigma)^2}, \qquad C_1 = \frac{R^2\,N^2\,(1 + N^2)}{(N^2 + \sin^2\sigma)^2}.$$

Zuletzt wollen wir dasselbe Verfahren noch einmal anwenden, um die Schraubenflächen konstanter mittlerer Krümmung abzuleiten. Bei dieser Aufgabe handelt es sich um die Transformation der Fundamentalform:

$$\partial s^2 = R^2\left[\sqrt{1 + N^2}\,\partial n\tau \pm N cn\tau\right]^2 \cdot \left[\partial u_1^2 + \partial u_2^2\right]$$

$$= \frac{R^2}{A + B}\left[\sqrt{A + C}\,\partial n\tau \pm \sqrt{C - B}\;cn\tau\right]^2\left[\partial u_1^2 + \partial u_2^2\right], \text{ wo } \tau = \sqrt{1 + N^2}\left[u_1 \sin\sigma + u_2 \cos\sigma\right].$$

Wir setzen:

$$u_1 = \pm \frac{1}{R\,m}\sqrt{\frac{A\,(C - B)}{C}} \cdot \int \frac{-r^2(2B + m^2) + m^2(A - B - m^2)}{r \cdot \sqrt{r^2 + m^2} \cdot \sqrt{4Cr^2 - (r^2 - A + B + m^2)^2}} \cdot \partial r - \frac{1}{R}\sqrt{\frac{A}{C}(C - B)} \cdot u.$$

$$u_2 = \mp \frac{1}{Rm}\sqrt{\frac{B\,(A + C)}{C}} \cdot \int \frac{r^2(2A - m^2) + m^2(A - B - m^2)}{r\,\sqrt{r^2 + m^2} \cdot \sqrt{4Cr^2 - (r^2 - A + B + m^2)^2}}\,\partial r + \frac{1}{R}\sqrt{\frac{B\,(A + C)}{C}} \cdot u.$$

Um τ durch die neuen Veränderlichen auszudrücken, bilden wir

$$\tau = \sqrt{\frac{B}{C}\,\frac{A + C}{A + B}} \cdot u_1 + \sqrt{\frac{A}{C}\,\frac{\sqrt{C - B)\,(A + C)}}{A + B}} \cdot u_2 = \mp \frac{1}{R\,m}\,\frac{A + C}{C} \cdot \sqrt{A \cdot B\,(C - B)}$$

$$\times \int \frac{2\,r\,\partial r}{\sqrt{r^2 + m^2}\,\sqrt{4\,Cr^2 - (r^2 - A + B + m^2)^2}}.$$

Schließlich führen wir wieder elliptische Funktionen ein durch die Gleichung:

$$r^2 + m^2 = \left[\sqrt{A + C}\,\partial n\varepsilon \pm \sqrt{C - B} \cdot cn\varepsilon\right]^2. \quad \text{Folglich}$$

$$\pm 2\sqrt{C - B} \cdot \sqrt{r^2 + m^2} \cdot cn\varepsilon = r^2 + m^2 - A - B,$$

$$2\sqrt{(C - B)\,(r^2 + m^2)}\;sn\varepsilon = \sqrt{4Cr^2 - (r^2 - A + B + m^2)^2},$$

$$r\,\partial r = \mp \sqrt{\frac{C - B}{A + C}}\,(r^2 + m^2) \cdot sn\varepsilon \cdot \partial\varepsilon.$$

Also $\tau = \frac{1}{R\sqrt{C}}\,\sqrt{(A + C)\,(C - B)} \cdot \int \partial\varepsilon,$ oder, da $(A + C)\,(C - B) = R^2C$, so $\tau = \varepsilon$,

$$\left[\sqrt{A + C}\,\partial n\tau \pm \sqrt{C - B}\;cn\tau\right]^2 = r^2 + m^2.$$

$$\partial s^2 = \frac{R^2\,(r^2 + m^2)}{A + B}\,(\partial u_1^2 + \partial u_2^2).$$

Nach einigen Umformungen erhält man dann für die neuen Fundamentalgrößen folgende Werte:

$$G_1 = r^2 + m^2,$$

$$F_1 = \mp m\,\frac{(r^2 + A - B - m^2) \cdot \sqrt{r^2 + m^2}}{r\sqrt{4\,Cr^2 - (r^2 - A + B + m^2)^2}}$$

$$E_1 = \frac{r^4\,(4\,R^2 + m^2) + 2r^2\,m^2\,(A - B - m^2) + m^2\,(A - B - m^2)^2}{r^2\,(4\,Cr^2 - (r^2 - A + B + m^2)^2)}.$$

Setzt man $\mp \frac{(r^2 + A - B - m^2)\,\sqrt{r^2 + m^2}}{r\,\sqrt{4\,Cr^2 - (r^2 - A + B + m^2)^2}} = \psi'(r)$, so $E_1 = 1 + \psi'^2(r)$, $F_1 = m \cdot \psi'(r)$.

Folglich das Linienelement dieser Flächen:

$$\partial s^2 = (1 + \psi'^2(r))\,\partial r^2 + 2\,m\psi'(r)\,\partial r\partial u + (r^2 + m^2)\,\partial u^2.$$

Ebenso gestaltet sich die Umformung der zweiten Grundform, und die Gleichungen unserer Flächen lauten:

$$x = r\,\cos\,u,$$
$$y = r\,\sin\,u,$$
$$z = m\,u \mp \int \frac{(r^2 + A - B - m^2)\,\sqrt{r^2 + m^2}}{r\,\sqrt{4\,Cr^2 - (r^2 - A + B + m^2)^2}}\,\partial r.$$

$$\text{Da } A - B - m^2 = R^2 - C,$$

$$4\,Cr^2 - (r^2 - A + B + m^2)^2 - r^4 + 2r^2\,(R^2 + C) - (R^2 - C)^2$$
$$= \left[(R + \sqrt{C})^2 - r^2\right] \cdot \left[r^2 - (R - \sqrt{C})^2\right], \text{ so}$$

$$z = m\,u \mp \int \frac{(r^2 + R^2 - C)\,.\,\sqrt{r^2 + m^2}}{r\,.\,\sqrt{\left[(R + \sqrt{C})^2 - r^2\right]\left[r^2 - (R - \sqrt{C})^2\right]}}\,.\,\partial r.$$

$z = m\,u \mp \int \frac{(r^2 + M\,.\,N)\,\sqrt{r^2 + m^2}}{r\,\sqrt{(M^2 - r^2)\,(r^2 - N^2)}}\partial r$, wenn $R + \sqrt{C} = M$, $R - \sqrt{C} = N$ gesetzt wird. M ist also immer positiv, während N auch negativ werden kann.

Abschnitt III.

Ableitung der beiden Flächengattungen aus den Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial\,.\,\partial'' - \partial'^2}{eg - f^2} = K, \qquad \frac{2f\partial' - e\partial'' - g\partial}{eg - f^2} = H.$$

Im vorigen Abschnitt war gezeigt, daß sich die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial {u_1}^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial {u_2}^2} + \sinh\vartheta\,\cosh\vartheta = o$$

integrieren läßt, wenn wir voraussetzen, daß ϑ eine lineare Kombination der Veränderlichen ist. Es stellte sich ferner heraus, daß die Flächen, welche dieser Lösung entsprechen, Schraubenflächen sind. Doch können wir die endlichen Gleichungen der letzteren bedeutend leichter finden, wenn wir von vornherein nur Schraubenflächen suchen, die den verlangten Bedingungen genügen, die also entweder konstante positive Totalkrümmung oder konstante mittlere Krümmung besitzen. Dann müssen die Gleichungen der gesuchten Flächen die Form haben:

$$x = \varrho\cos\upsilon, \qquad y = \varrho\,.\,\sin\upsilon, \qquad z = m\upsilon + \varphi(\varrho).$$

Setzt man die hieraus abgeleiteten Fundamentalgrößen in die bekannten Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial\partial'' - \partial'^2}{eg - f^2} = +\frac{1}{R^2}, \qquad \frac{2f\partial' - e\partial'' - g\partial}{eg - f^2} = \pm\frac{1}{R}$$

ein, so erhält man als Differentialgleichung der Schraubenflächen konstanter positiver Totalkrümmung:

$$\frac{\varrho^3\,.\,\varphi'(\varrho)\,.\,\varphi''(\varrho) - m^2}{(\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho))^2} = \frac{1}{R^2}.$$

Ferner lautet die Differentialgleichung der Schraubenflächen konstanter mitterer Krümmung:

$$\frac{-\,2m^2\,.\,\psi'(r) - r^2\psi'(r)\,(1 + \psi'^2(r)) - r\,(r^2 + m^2)\,\psi''(r)}{\sqrt{r^2 + m^2 + r^2\,.\,\psi'^2(r)}^3} = \pm\frac{1}{R}.$$

Beide Gleichungen lassen sich noch einigen Umformungen integrieren. Wir schreiben die erste folgendermaßen:

$$\frac{1}{\varrho}\,\frac{\varphi'(\varrho)\,.\,\varphi''(\varrho) - \dfrac{m^2}{\varrho^3}}{\left(1 + \varphi'^2(\varrho) + \dfrac{m^2}{\varrho^2}\right)^2} = \frac{1}{R^2}, \qquad \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial\left[\dfrac{1}{1 + \varphi'^2(\varrho) + \dfrac{m^2}{\varrho^2}}\right]}{\partial\varrho} = -\frac{2}{R^2},$$

$$\frac{\varrho^2}{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)} = -\frac{\varrho^2}{R^2} + C_1, \qquad \frac{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}{\varrho^2} = \frac{R^2}{C - \varrho^2}.$$

Da die linke Seite immer positiv ist, so muß $C > o$ sein.

$$\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho) = \frac{R^2 \cdot \varrho^2}{C - \varrho^2}.$$

$$\varrho^2 \cdot \varphi'^2(\varrho) = \frac{R^2\varrho^2}{C - \varrho^2} - (\varrho^2 + m^2) = \frac{R^2\varrho^2 - C(\varrho^2 + m^2) + \varrho^2(\varrho^2 + m^2)}{C - \varrho^2}.$$

$$\varphi'(\varrho) = \pm \frac{1}{\varrho} \cdot \sqrt{\frac{R^2\varrho^2 - C(\varrho^2 + m^2) + \varrho^2(\varrho^2 + m^2)}{C - \varrho^2}}$$

$$= \pm \frac{1}{\varrho} \cdot \sqrt{\frac{\varrho^4 + \varrho^2 (R^2 + m^2 - C) - Cm^2}{C - \varrho^2}}$$

$$= \pm \frac{1}{\varrho} \cdot \sqrt{\frac{(\varrho^2 + A)(\varrho^2 - B)}{C - \varrho^2}}, \text{ wo}$$

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{(R^2 + m^2 - C)^2 + 4 \cdot Cm^2} + \frac{1}{2}(R^2 + m^2 - C),$$

$$B = \frac{1}{2}\sqrt{(R^2 + m^2 - C)^2 + 4\, Cm^2} - \frac{1}{2}(R^2 + m^2 - C).$$

Wir erhalten also wieder dasselbe Resultat. Eine ähnliche Umformung erlaubt auch die zweite Differentialgleichung.

$$-\frac{\psi'(r)\,(r^2 + m^2 + r^2\psi'^2(r))}{\sqrt{r^2 + m^2 + r^2\psi'^2(r)}^3} - \frac{m^2\psi'(r) + r(r^2 + m^2) \cdot \psi''(r)}{\sqrt{r^2 + m^2 + r^2\psi'^2(r)}^3} = \pm \frac{1}{R}.$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\psi'(r)}{\sqrt{1 + \psi'^2(r) + \frac{m^2}{r^2}}} + \frac{\frac{m^2 \cdot \psi'(r)}{r^2} + \frac{r^2 + m^2}{r} \cdot \psi''(r)}{\sqrt{1 + \psi'^2(r) + \frac{m^2}{r^2}}^3}\right] = \mp \frac{1}{R}$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\psi'(r)}{\sqrt{1 + \psi'^2(r) + \frac{m^2}{r^2}}} + \frac{r \cdot \psi''(r)}{\sqrt{1 + \psi'^2(r) + \frac{m^2}{r^2}}} + \frac{\frac{m^2\psi'(r)}{r^2} - r\psi''(r) \cdot \psi'^2(r)}{\sqrt{1 + \psi'^2(r) + \frac{m^2}{r^2}}^3}\right] = \mp \frac{1}{R}.$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\, r\psi'(r)}{\partial r}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \psi'^2(r) + \frac{m^2}{r^2}}} + \frac{r\psi'(r)\left(\frac{m^2}{r^3} - \psi'(r) \cdot \psi''(r)\right)}{\sqrt{1 + \psi'^2(r) + \frac{m^2}{r^2}}^3}\right] = \mp \frac{1}{R}.$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\, r\psi'(r)}{\partial r}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \psi'^2(r) + \frac{m^2}{r^2}}} + r\psi'(r)\,\frac{\partial\left[\frac{1}{\sqrt{1 + \psi'^2(r) + \frac{m^2}{r^2}}}\right]}{\partial r}\right] = \mp \frac{1}{R}.$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\left[\frac{r\psi'(r)}{\sqrt{1 + \psi'^2(r) + \frac{m^2}{r^2}}}\right]}{\partial r} = \mp \frac{1}{R}.$$

$$\mp \frac{2r\psi'(r) \cdot R}{\sqrt{1 + \psi'^2(r) + \frac{m^2}{r^2}}} = r^2 + C_1.$$

Setzt man $C_1 = R^2 - C$, so $\dfrac{4\, R^2 \cdot r^4\psi'^2(r)}{r^2 + m^2 + r^2\psi'^2(r)} = (r^2 + R^2 - C)^2.$

$$4\,R^2r^4\psi'^2(r) = (r^2 + m^2)\,(r^2 + R^2 - C)^2 + r^2\psi'^2(r)\,(r^2 + R^2 - C)^2$$

$$r^2\psi'^2(r)\,[4\,R^2r^2 - (r^2 + R^2 - C)^2] = (r^2 + m^2)\,(r^2 + R^2 - C)^2.$$

$$r^2\psi'^2(r)\,[(R + \sqrt{C})^2 - r^2]\,[r^2 - (R - \sqrt{C})^2] = (r^2 + m^2)\,(r^2 + R^2 - C)^2.$$

$$\psi'(r = \mp \frac{(r^2 + R^2 - C)\sqrt{r^2 + m^2}}{r\,.\,\sqrt{[(R + \sqrt{C})^2 - r^2]\,[r^2 - (R - \sqrt{C})^2]}}.$$

Um zu untersuchen, welches Zeichen der positiven beziehungsweise der negativen mittleren Krümmung entspricht, haben wir $\psi'(r)$ noch einmal in die Gleichung:

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial\left[\dfrac{r\psi'(r)}{\sqrt{1 + \psi'^2(r) + \dfrac{m^2}{r^2}}}\right]}{\partial r} = \mp\,\frac{1}{R}$$

einzusetzen. Man überzeugt sich dann, daß dem — Zeichen positive mittlere Krümmung, dem + Zeichen dagegen negative zukommt.

Abschnitt IV.

Darstellung der Schraubenflächen konstanter positiver Totalkrümmung als Verbiegungsflächen der Kugel. Bestimmung der Schraubenflächen konstanter mittlerer Krümmung als Parallelflächen der ersten Flächengattung.

In der Einleitung war schon bemerkt worden, daß sich alle Flächen konstanter positiver Totalkrümmung auf die Kugel abwickeln lassen. Berücksichtigen wir diese Tatsache, so gelangen wir zu einer dritten Ableitung unserer Flächen. Dieser Weg führt direkt auf Quadraturen, ohne daß es nötig ist, Differentialgleichungen aufzulösen. Das Linienelement aller Schraubenflächen besitzt die Form:

$$1.\quad \partial s^2 = (1 + \varphi'^2(\varrho))\,\partial\varrho^2 + 2m\varphi'(\varrho)\partial\varrho\partial\upsilon + (\varrho^2 + m^2)\,\partial\upsilon^2.$$

Daraus kann man das Bogendifferential einer beliebigen Rotationsfläche gewinnen, wenn man $m = o$ setzt. Führt man noch an Stelle von ϱ — r und an Stelle von $\varphi'(\varrho)$ — $\psi'(r)$ ein, so lautet das Linienelement einer beliebigen Rotationsfläche: $\partial s_1{}^2 = (1 + \psi'^2(r))\,\partial r^2 + r^2\partial\upsilon^2$. Ist die Rotationsfläche eine Kugel mit dem Radius R, so $\psi(r) = \sqrt{R^2 - r^2}$. Folglich das Linienelement der Kugel:

$$2.\quad \partial s_1{}^2 = \frac{R^2}{R^2 - r^2}\,\partial r^2 + r^2\partial\upsilon^2.$$

Um 1. mit 2. vergleichen zu können, führen wir in 1. neue Parameter ein, wir substituieren $\upsilon = k\upsilon_1 - m\int\frac{\varphi'(\varrho)\partial\varrho}{\varrho^2 + m^2}$, wo k eine beliebige Konstante ist. Wir erhalten dann:

$$1.\quad \partial s^2 = \left[1 + \frac{\varrho^2\varphi'^2(\varrho)}{\varrho^2 + m^2}\right]\partial\varrho^2 + k^2(\varrho^2 + m^2)\,\partial\upsilon_1{}^2.$$

Aus der Form dieses Linienelementes geht übrigens hervor, daß die Gleichungen ϱ = konstant geodätisch parallele Linien* darstellen, während ihre orthogonalen Trajektorien, also die Parameter-

* Stahl und Kommerell: Die Grundformeln der Allgemeinen Flächentheorie. pag. 14.

kurven v_1, geodätische Linien sind. Nehmen wir nun an, daß die Veränderlichen v und v_1, in 2. und 1. identisch sind, so kann man die beiden Linienelemente gleich machen, wenn man setzt:

$$r^2 = k^2(\varrho^2 + m^2),$$

$$\frac{R^2}{R^2 - r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial \varrho}\right)^2 = 1 + \frac{\varrho^2\varphi'^2(\varrho)}{\varrho^2 + m^2}.$$

Da noch $\frac{\partial r}{\partial \varrho} = \frac{k\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + m^2}}$ ist, so wird

$$\frac{R^2}{R^2 - k^2(\varrho^2 + m^2)} \cdot \frac{k^2\varrho^2}{\varrho^2 + m^2} = 1 + \frac{\varrho^2\varphi'^2(\varrho)}{\varrho^2 + m^2}.$$

$$\frac{R^2k^2\varrho^2}{R^2 - k^2(\varrho^2 + m^2)} = \varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho).$$

$$\varrho^2\varphi'^2(\varrho) = \frac{R^2k^2\varrho^2 - R^2(\varrho^2 + m^2) + k^2(\varrho^2 + m^2)^2}{R^2 - k^2(\varrho^2 + m^2)}.$$

$$\varphi'(\varrho) = \pm \frac{1}{\varrho}\sqrt{\frac{\varrho^4 + \varrho^2\left(R^2 + 2m^2 - \frac{R^2}{k^2}\right) - \frac{R^2m^2}{k^2} + m^4}{\frac{R^2 - k^2m^2}{k^2} - \varrho^2}}.$$

Setzt man $\frac{R^2 - k^2m^2}{k^2} = C$, so $\varphi'(\varrho) = \pm \frac{1}{\varrho}\sqrt{\frac{\varrho^4 + \varrho^2(R^2 + m^2 - C) - Cm^2}{C - \varrho^2}}$.

Also wieder dasselbe Resultat.

Zu jeder Fläche konstanter positiver Totalkrümmung gehören nun nach dem Bonnetschen Satze zwei Parallelflächen konstanter mittlerer Krümmung. Läßt sich also zeigen, daß die Parallelflächen der Schraubenflächen wieder Schraubenflächen sind, so kann man aus den letzten Gleichungen auch die Schraubenflächen konstanter mittlerer Krümmung ableiten. Für die Parallelfläche erhält man, den Abstand $\pm$ R vorausgesetzt:

$$x' = x \pm R \,.\, X, \quad y' = y \pm R \,.\, Y, \quad z' = z \pm R \,.\, Z.$$

Führt man in diese Gleichungen die für X, Y, Z im zweiten Abschnitte berechneten Werte ein, so erhält man:

$$x' = \varrho \,.\, \cos v \pm \frac{R}{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}} \cdot \left[m \sin v - \varrho \cos v \,\varphi'(\varrho)\right],$$

$$y' = \varrho \sin v \mp \frac{R}{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}} \cdot \left[m \cos v + \varrho \sin v \,\varphi'(\varrho)\right],$$

$$z' = mv + \varphi(\varrho) \pm \frac{R\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}}, \text{ oder}$$

$$\text{I.}\left\{\begin{aligned} x' &= \varrho \,.\, \cos v\left[1 \mp \frac{R\varphi'(\varrho)}{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}}\right] \pm \frac{Rm \sin v}{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}},\\ y' &= \varrho \sin v\left[1 \mp \frac{R\varphi'(\varrho)}{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}}\right] \mp \frac{Rm \cos v}{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}},\\ z' &= mv + \varphi(\varrho) \pm \frac{R\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}}.\end{aligned}\right.$$

Um zu beweisen, daß diese Gleichungen wieder Schraubenflächen darstellen, setzen wir in die beiden ersten $x' = r \cos u$, $y' = r \,.\, \sin u$ ein. Quadriert und addiert man ferner, so wird

$$r^2 = \varrho^2\left[1 \mp \frac{R\varphi'(\varrho)}{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}}\right]^2 + \frac{R^2m^2}{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}.$$

Es ist also r nur Funktion von ϱ, ebenso hängt umgekehrt ϱ nur von r ab. Man kann darum $\varphi(\varrho) \pm \frac{R\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}}$ als Funktion von r darstellen.

Folglich $\varphi(\varrho) \pm \frac{R\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}} = f_1(r)$. Substituiert man weiter:

$$\varrho \left[1 \mp \frac{R\varphi'(\varrho)}{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}}\right] = M, \quad \frac{Rm}{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}} = N,$$

so lauten die beiden ersten Gleichungen von I.:

$$r \cos u = M \cos \upsilon \pm N \sin \upsilon$$
$$r \sin u = M \sin \upsilon \mp N \cos \upsilon$$

$$\operatorname{tg} u = \frac{M \sin \upsilon \mp N \cos \upsilon}{M \cos \upsilon \pm R \sin \upsilon} = \frac{\frac{M}{\sqrt{M^2 + N^2}} \sin \upsilon \mp \frac{N}{\sqrt{M^2 + N^2}} \cos \upsilon}{\frac{M}{\sqrt{M^2 + N^2}} \cos \upsilon \pm \frac{N}{\sqrt{M^2 + N^2}} \sin \upsilon} = \frac{\cos \varepsilon \sin \upsilon \mp \sin \varepsilon \cos \upsilon}{\cos \varepsilon \cos \upsilon \pm \sin \varepsilon \sin \upsilon},$$

wenn $\frac{M}{\sqrt{M^2 + N^2}} = \cos \varepsilon$, $\frac{N}{\sqrt{M^2 + N^2}} = \sin \varepsilon$ gesetzt wird.

$$\text{Also} \quad \operatorname{tg} u = \frac{\sin(\upsilon \mp \varepsilon)}{\cos(\upsilon \pm \varepsilon)} = \operatorname{tg}(\upsilon \mp \varepsilon).$$

$u = \upsilon \mp \varepsilon + 2n\pi$, wo ε eine Funktion von ϱ, also auch von r ist. Man erhält demnach $\upsilon = u + f_2(r)$. Dann lauten die Gleichungen I:

$$x' = r \cos u, \quad y' = r \sin u, \quad z' = mu + f_1(r) + mf_2(r) = mu + \psi(r).$$

Die Parallelfläche ist also wieder eine Schraubenfläche mit demselben Parameter der Schraubung. Es ist nur noch die unbekannte Funktion $\psi(r)$ zu bestimmen. Berücksichtigen wir, daß die in entsprechenden Punkten der beiden Parallelflächen errichteten Normalen zusammenfallen, so können wir die Gleichung aufstellen:

$$\frac{\pm r}{\sqrt{r^2 + m^2 + r^2\psi'^2(r)}} = \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}},$$

weil die beiden Seiten derselben die Kosinus der Winkel darstellen, welche jene Normalen mit der z Achse bilden. Da nun $\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho) = \frac{R^2\varrho^2}{C - \varrho^2}$, so folgt:

$$\sqrt{r^2 + m^2 + r^2\psi'^2(r)} = \pm \frac{Rr}{\sqrt{C - \varrho^2}}.$$

Nun ist aber ϱ durch r bestimmt, wie aus der Gleichung hervorgeht:

$$r^2 = \varrho^2 \cdot \left[1 \mp \frac{R\varphi'(\varrho)}{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}}\right]^2 + \frac{R^2 m^2}{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}.$$

$$r^2 = \frac{1}{\varrho^2}\left[\left(\varrho^2 \mp \sqrt{(\varrho^2 + A)(\varrho^2 - B)}\right)^2 + m^2 (C - \varrho^2)\right].$$

$$= 2\varrho^2 + A - B - m^2 \pm 2\sqrt{(\varrho^2 + A)(\varrho^2 - B)}, \text{ da } A \cdot B = m^2 C.$$

Für ϱ^2 erhält man schließlich durch elementare Rechnung:

$$\varrho^2 = \frac{(r^2 - A + B + m^2)^2 + 4\,A \cdot B}{4\,(r^2 + m^2)}, \quad \text{ebenso } C - \varrho^2 = \frac{4\,Cr^2 - (r^2 - A + B + m^2)^2}{4\,(r^2 + m^2)}.$$

$$\varrho^2 + A = \frac{(r^2 + A + B + m^2)^2}{4\,(r^2 + m^2)}, \qquad \varrho^2 - B = \frac{(r^2 - A - B + m^2)^2}{4\,(r^2 + m^2)}.$$

$$\text{Mithin } r^2 + m^2 + r^2\psi'^2(r) = \frac{4\,R^2 r^2\,(r^2 + m^2)}{4\,Cr^2 - (r^2 - A + B + m^2)^2}.$$

Löst man diese Gleichung nach $\psi'(r)$ auf, so erhält man nach einigen Umformungen

$$\psi'(r) = \mp \frac{(r^2 + R^2 - C)\sqrt{r^2 + m^2}}{r\sqrt{\left[(R + \sqrt{C})^2 - r^2\right]\left[r^2 - (R - \sqrt{C})^2\right]}}.$$

Das stimmt also wieder mit unseren früheren Resultaten überein.

Abschnitt V.

Die Bäcklundsche Transformation; Ableitung neuer Flächen konstanter positiver Totalkrümmung.

Große Fortschritte in der Theorie der Flächen konstanter Totalkrümmung sind erzielt worden durch die Transformationsmethoden, die es erlauben, aus einer gegebenen Fläche konstanter positiver Totalkrümmung mit verhältnismäßig einfachen Rechenoperationen brliebig viele neue Flächen von derselben Eigenschaft abzuleiten. In erster Linie ist die Bäcklundsche Transformation zu nennen. Da mit ihrer Hilfe die Dinischen Schraubenflächen, das sind Schraubenflächen konstanter negativer Totalkrümmung, leicht gefunden werden können, so liegt die Möglichkeit vor, daß wir durch denselben Weg auch auf unsere Flächen geführt werden. Doch besteht zwischen der Transformation der pseudosphärischen Flächen und derjenigen der Verbiegungsflächen der Kugel ein wesentlicher Unterschied. Während im ersten Falle die Transformation reelle Flächen ergibt, führt sie im zweiten Falle von einer reellen Biegungsfläche zu einer abgeleiteten, die notwendigerweise imaginär ist. Mag ϑ eine Lösung der Differentialgleichung $\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u_1{}^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial u_2{}^2} + \sinh\vartheta \, . \, \cosh\vartheta = 0$ sein, so lassen sich die endlichen Gleichungen der entsprechenden Fläche S aus folgenden Formeln bestimmen.*

$$\frac{\partial x}{\partial u_1} = R \sinh\vartheta \, X_1, \quad \frac{\partial X_1}{\partial u_1} = -\frac{\partial\vartheta}{\partial u_1} \, . \, X_2 - \cosh\vartheta \, X_3, \quad \frac{\partial X_2}{\partial u_1} = \frac{\partial\vartheta}{\partial u_2} \, . \, X_1, \quad \frac{\partial X_3}{\partial u_1} = \cosh\vartheta \, X_1,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u_2} = R \cosh\vartheta \, X_2, \quad \frac{\partial X_1}{\partial u_2} = \frac{\partial\vartheta}{\partial u_1} X_2, \quad \frac{\partial X_2}{\partial u_2} = -\frac{\partial\vartheta}{\partial u_1} X_1 - \sinh\vartheta \, . \, X_3, \quad \frac{\partial X_3}{\partial u_2} = \sinh\vartheta \, X_2 \quad \text{u. s. w.}$$

Genügt nun eine zweite Funktion ϑ_1 den Gleichungen

$$\frac{\partial\vartheta_1}{\partial u_1} + i\frac{\partial\vartheta}{\partial u_2} = \sinh\sigma \cosh\vartheta \sinh\vartheta_1 + \cosh\sigma \sinh\vartheta \cosh\vartheta_1,$$

$$i\frac{\partial\vartheta_1}{\partial u_2} + \frac{\partial\vartheta}{\partial u_1} = -\cosh\sigma \cosh\vartheta \sinh\vartheta_1 - \sinh\sigma \sinh\vartheta \cosh\vartheta_1,$$

so gehört zu jeder Lösung ϑ_1 eine andere Fläche mit derselben Totalkrümmung. Die in den Formeln auftretende Größe σ ist eine willkürliche Konstante. Die Gleichungen dieser zweiten Fläche lauten:

$$x_1 = x - \frac{R}{\cosh\sigma} (\sinh\vartheta \, X_1 + i \cosh\vartheta \, X_2) \quad \text{u. s. w.}$$

Sie stellen eine imaginäre Lösung dar. Wir betrachten nun zwei Flächen S_1 und S_2, die aus S durch die Bäcklundsche Transformation hervorgehen und die den Werten σ_1 und σ_2 der Konstanten σ entsprechen. Für die beiden Funktionen ϑ_1 und ϑ_2 gelten dann die Gleichungen.

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\vartheta_1}{\partial u_1} + i\frac{\partial\vartheta}{\partial u_2} &= \sinh\sigma_1 \cosh\vartheta \sinh\vartheta_1 + \cosh\sigma_1 \sinh\vartheta \cosh\vartheta_1, \\ i\frac{\partial\vartheta_1}{\partial u_2} + \frac{\partial\vartheta}{\partial u_1} &= -\cosh\sigma_1 \cosh\vartheta \sinh\vartheta_1 - \sinh\sigma_1 \sinh\vartheta \cosh\vartheta_1; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\vartheta_2}{\partial u_1} + i\frac{\partial\vartheta}{\partial u_2} &= \sinh\sigma_2 \cosh\vartheta \sinh\vartheta_2 + \cosh\sigma_2 \sinh\vartheta \cosh\vartheta_2, \\ i\frac{\partial\vartheta_2}{\partial u_2} + \frac{\partial\vartheta}{\partial u_1} &= -\cosh\sigma_2 \cosh\vartheta \sinh\vartheta_2 - \sinh\sigma_2 \sinh\vartheta \cosh\vartheta_2. \end{aligned}\right.$$

Die Flächen S_1 und S_2 sind gegeben durch:

$$x_1 = x - \frac{R}{\cosh\sigma_1} (\sinh\vartheta_1 \, X_1 + i \cosh\vartheta_1 \, X_2) \quad \text{u. s. w.}$$

$$x_2 = x - \frac{R}{\cosh\sigma_2} (\sinh\vartheta_2 \, X_1 + i \cosh\vartheta_2 \, X_2) \quad \text{u. s. w.}$$

* Bianchi, pag. 492, siehe auch die Ausführungen von Darboux in den Comptes Rendus, 27. 3., 17. und 24. 4. 1899.

Nach dem Vertauschbarkeitssatz läßt sich ferner zu den drei Flächen S, S_1 und S_2 eine vierte Fläche S' mit der Totalkrümmung $K = +\frac{1}{R^2}$ finden, die den Gleichungen genügt:

$$x' = x + \frac{R \sinh(\sigma_1 - \sigma_2)}{\cosh\sigma_1 \cdot \cosh\sigma_2 \, [\cosh(\vartheta_1 - \vartheta_2) - \cosh(\sigma_1 - \sigma_2)]} \cdot \left[\begin{array}{c} (\sinh\sigma_1 \sinh\vartheta_2 - \sinh\sigma_2 \sinh\vartheta_1)\, X_1 + \\ + i(\sinh\sigma_1 \cosh\vartheta_2 - \sinh\sigma_2 \cosh\vartheta_1) \,.\, X_2 + \\ + \sinh(\vartheta_1 - \vartheta_2) \,.\, X_3 \end{array} \right]$$

Trifft man nun die Voraussetzung, daß $\sigma_2 = -\bar{\sigma}_1$, $\vartheta_2 = \pi i - \bar{\vartheta}_1$, wo $\bar{\sigma}_1$ und $\bar{\vartheta}_1$ die zu σ_1 und ϑ_1 konjugierten Größen darstellen, so wird die vierte Fläche S' reell. Setzt man noch $\sigma_1 = a + ib$, $\vartheta_1 = \omega + i\varphi$, so läßt sie sich auch in reeller Form darstellen:

$$x' = x + \frac{2R \sinh a \cosh a}{(\sinh^2 a + \cos^2 b)(\sinh^2 a + \cosh^2 \omega)} \cdot \left[\begin{array}{c} -(\sinh a \cos b \sinh\omega \cos\varphi + \cosh a \sin b \cosh\omega \sin\varphi)\, X_1 + \\ + (\sinh a \cos b \sinh\omega \sin\varphi - \cosh a \sin b \cosh\omega \cos\varphi) \,.\, X_2 + \\ + \sinh\omega \,.\, \cosh\omega \, X_3 \end{array} \right]$$

Wir wollen diese Formeln, wie sie für die Bäcklundsche Transformation der Flächen konstanter positiver Totalkrümmung gelten, auf einen besonderen Fall anwenden. Der Wert $\vartheta = o$ ist eine Lösung der Fundamentalgleichung $\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial u_2^2} + \sinh\vartheta \cosh\vartheta = o$. Wir müssen nun x, y, z, X_1, Y_1, Z_1 u. s. w. so annehmen, daß den oben angeführten Differentialgleichungen genügt wird. Das geschieht durch folgende Werte:

$$\begin{array}{lll} x = o, & y = o, & z = Ru_2, \\ X_1 = \cos u_1, & Y_1 = \sin u_1, & Z_1 = o, \\ X_2 = o, & Y_2 = o, & Z_2 = 1, \\ X_3 = \sin u_1, & Y_3 = -\cos u_1, & Z_3 = o. \end{array}$$

Die Fläche S zieht sich also auf die z Achse zusammen. Ferner muß ϑ_1 aus den Gleichungen bestimmt werden:

$$\frac{\partial\vartheta_1}{\partial u_1} = \sinh\sigma_1 \sinh\vartheta_1,$$

$$i\frac{\partial\vartheta_1}{\partial u_2} = -\cosh\sigma_1 \sinh\vartheta_1.$$

Ihre Integration ergibt: $\log \operatorname{tgh}\frac{\vartheta_1}{2} = u_1 \sinh\sigma_1 + i\, u_2 \cosh\sigma_1$, oder $\operatorname{tgh}\frac{\vartheta_1}{2} = e^{\tau}$,

wo $\tau = u_1 \sinh\sigma_1 + i\, u_2 \cosh\sigma_1$.

Ferner $\sinh\vartheta_1 = -\frac{1}{\sinh\tau}$, $\coth\vartheta_1 = \cosh\tau$, $\cosh\vartheta_1 = -\coth\tau$.

Folglich ist die Fläche S_1 bestimmt durch:

$$x_1 = \frac{R}{\cosh\sigma_1}\,\frac{\cos u_1}{\sinh\tau}, \quad y_1 = \frac{R}{\cosh\sigma_1}\,\frac{\sin u_1}{\sinh\tau}, \quad z_1 = Ru_2 + \frac{Ri}{\cosh\sigma_1}\coth\tau.$$

Die durch diese Gleichungen dargestellten Schraubenflächen konstanter positiver Totalkrümmung entsprechen offenbar den Dinischen Schraubenflächen. Nur sind sie im Gegensatz zu den letzteren imaginär.

Es müssen sich übrigens die soeben entwickelten Formeln auch aus den allgemeinen Gleichungen $x = \varrho \cos\upsilon$, $y = \varrho \sin\upsilon$, $z = m\upsilon - \int \sqrt{\frac{(\varrho^2 + A)(\varrho^2 - B)}{C - \varrho^2}} \cdot \frac{\partial\varrho}{\varrho}$ ableiten lassen. Setzt man $C = o$, so wird $B = o$, $A = R^2 + m^2$, $z = m\upsilon + i \int \frac{\partial\varrho}{\varrho} \sqrt{\varrho^2 + R^2 + m^2}$. Das gibt wieder dieselbe imaginäre Fläche, nur in anderer Form. Soll auch darin Übereinstimmung herrschen, so brauchen wir nur ϱ und υ durch die Parameter der Krümmungslinien u_1 und u_2 auszudrücken. Wir erinnern uns der Gleichungen:

$$u_1 = -\sqrt{\frac{C \,.\, B}{A + C}} \int \sqrt{\frac{\varrho^2 + A}{(\varrho^2 - B)(C - \varrho^2)}}\, \frac{\partial\varrho}{\varrho} - \frac{1}{R}\sqrt{\frac{A\,(C - B)}{C}}\, \upsilon,$$

$$u_2 = -\sqrt{\frac{C \,.\, A}{C - B}} \cdot \int \sqrt{\frac{\varrho^2 - B}{(\varrho^2 + A)(C - \varrho^2)}}\, \frac{\partial\varrho}{\varrho} + \frac{1}{R}\sqrt{\frac{B\,(A + C)}{C}}\, \upsilon.$$

In unserem Falle lauten sie:

$$u_1 = -\upsilon,$$

$$u_2 = \frac{R^2 + m^2}{R}\, i \int \frac{\partial\varrho}{\varrho \,.\, \sqrt{\varrho^2 + R^2 + m^2}} + \frac{m}{R}\,\upsilon.$$

Daraus folgt: $\varrho = \frac{\sqrt{R^2 + m^2}}{\sinh\tau}$, $\sqrt{\varrho^2 + R^2 + m^2} = \sqrt{R^2 + m^2}\coth\tau$,

wenn $-i\frac{m}{\sqrt{R^2 + m^2}}\upsilon + \frac{iR}{\sqrt{R^2 + m^2}} \,.\, u_2 = \tau$ gesetzt wird.

Folglich werden die Gleichungen unserer Fläche:

$$x = \frac{\sqrt{R^2 + m^2}}{\sinh\tau}\cos\upsilon, \quad y = \frac{\sqrt{R^2 + m^2}}{\sinh\tau}\sin\upsilon, \quad z = Ru_2 + i\sqrt{R^2 + m^2}\coth\tau.$$

Substituiert man schließlich: $\frac{R}{\sqrt{R^2 + m^2}} = \cosh\sigma_1$, $-\frac{im}{\sqrt{R^2 + m^2}} = \sinh\sigma_1$,

so wird $\tau = \upsilon \,.\, \sinh\sigma_1 + i\, u_2 \cosh\sigma_1$,

$$x = \frac{R}{\cosh\sigma_1}\frac{\cos\upsilon}{\sinh\tau}, \quad y = \frac{R}{\cosh\sigma_1}\frac{\sin\upsilon}{\sinh\tau}, \quad z = Ru_2 + \frac{Ri}{\cosh\sigma_1}\coth\tau,$$

also in der Tat wieder dasselbe Resultat.

Auch die vierte Fläche S' läßt sich nunmehr leicht ableiten, ohne daß Quadraturen und Differentationen erforderlich sind. Wir brauchen nur die reellen von den imaginären Bestandteilen zu trennen. Also $\sigma_1 = a + ib$.

$$\sinh\sigma_1 = \sinh(a + ib) = \sinh a \cos b + i \cosh a \sin b,$$

$$\cosh\sigma_1 = \cosh(a + ib) = \cosh a \cos b + i \sinh a \sin b.$$

Folglich $\tau = \tau_1 + i\tau_2$, wenn wir setzen $\tau_1 = \sinh a\,(u_1 \cos b - u_2 \sin b)$, $\tau_2 = \cosh a\,(u_1 \sin b + u_2 \cos b)$.

Führt man für ϑ_1 $\omega + i\varphi$ ein, so erhält man:

$$\sinh(\omega + i\varphi) = -\frac{1}{\sinh(\tau_1 + i\tau_2)}, \quad \cosh(\omega + i\varphi) = -\coth(\tau_1 + i\tau_2).$$

Daraus ergibt sich durch Trennung der reellen und imaginären Teile:

$$\sinh\omega \cos\varphi = -\frac{\sinh\tau_1 \,.\, \cos\tau_2}{\cosh^2\tau_1 - \cos^2\tau_2}, \quad \cosh\omega \sin\varphi = +\frac{\cosh\tau_1 \,.\, \sin\tau_2}{\cosh^2\tau_1 - \cos^2\tau_2}.$$

$$\cosh\omega \cos\varphi = -\frac{\sinh\tau_1 \,.\, \cosh\tau_1}{\cosh^2\tau_1 - \cos^2\tau_2}, \quad \sinh\omega \,.\, \sin\varphi = +\frac{\sin\tau_2 \,.\, \cos\tau_2}{\cosh^2\tau_1 - \cos^2\tau_2}.$$

Ebenso erhält man: $\operatorname{tgh}\omega = \frac{\cos\tau_2}{\cosh\tau_1}$, $\cosh^2\omega = \frac{\cosh^2\tau_1}{\cosh^2\tau_1 - \cos^2\tau_2}$, $\sinh^2\omega = \frac{\cos^2\tau_2}{\cosh^2\tau_1 - \cos^2\tau_2}$.

$$\sinh^2 a + \cosh^2\omega = \frac{\cosh^2 a \cosh^2\tau_1 - \sinh^2 a \cos^2\tau_2}{\cosh^2\tau_1 - \cos^2\tau_2}.$$

Mithin die Gleichungen der Fläche S':

$$x' = \frac{2R \sinh a \cosh a}{(\sinh^2 a + \cos^2 b)(\cosh^2 a \cosh^2\tau_1 - \sinh^2 a \cos^2\tau_2)} \times$$
$$\times [(\sinh a \cos b \sinh\tau_1 \,.\, \cos\tau_2 - \cosh a \sin b \cosh\tau_1 \sin\tau_2) \,.\, \cos u_1 + \cosh\tau_1 \cos\tau_2 \sin u_1],$$

$$y' = \frac{2R \sinh a \cosh a}{(\sinh^2 a + \cos^2 b)(\cosh^2 a \,.\, \cosh^2\tau_1 - \sinh^2 a \cos^2\tau_2)} \times$$
$$\times [(\sinh a \cos b \sinh\tau_1 \cos\tau_2 - \cosh a \sin b \cosh\tau_1 \sin\tau_2) \sin u_1 - \cosh\tau_1 \cos\tau_2 \cos u_1],$$

$$z' = Ru_2 + \frac{2R \sinh a \cosh a}{(\sinh^2 a + \cos^2 b)(\cosh^2 a \,.\, \cosh^2\tau_1 - \sinh^2 a \cos^2\tau_2)} \times$$
$$\times [\sinh a \,.\, \cos b \,.\, \sin\tau_2 \cos\tau_2 + \cosh a \sin b \sinh\tau_1 \cosh\tau_1].$$

Nimmt man $b = o$ an, so vereinfachen sich die Gleichungen. Sie lauten in diesem Falle:

$$x' = \frac{2R \,.\, \operatorname{tgh} a \,.\, \cos\tau_2}{\cosh^2 a \,.\, \cosh^2\tau_1 - \sinh^2 a \,.\, \cos^2\tau_2} \,.\, [\sinh a \,.\, \sinh\tau_1 \cos u_1 + \cosh\tau_1 \,.\, \sin u_1),$$

$$y' = \frac{2R\ \mathrm{tgha}\ .\ \cos\tau_2}{\cosh^2 a\ \cosh^2\tau_1 - \sinh^2 a\ .\ \cos^2\tau_2} \cdot [\mathrm{sinha}\ .\ \sinh\tau_1\ .\ \sin u_1 - \cosh\tau_1\ .\ \cos u_1],$$

$$z' = Ru_2 + \frac{2R\ \mathrm{tgha}\ .\ \mathrm{sinha}\ .\ \sin\tau_2\ .\ \cos\tau_2}{\cosh^2 a\ .\ \cosh^2\tau_1 - \sinh^2 a\ .\ \cos^2\tau_2}.$$

Ferner wird $\tau_1 = \mathrm{sinha}\ .\ u_1$, $\tau_2 = \mathrm{cosha}\ .\ u_2$. Es hängt also τ_1 nur von u_1 und τ_2 nur von u_2 ab. Man kann nun leicht zeigen, daß die letzte Fläche ein System von ebenen Krümmungslinien besitzt, während die Krümmungslinien des zweiten Systems sphärisch sind. Dividiert man nämlich die beiden ersten Gleichungen durch einander, so wird:

$$\frac{x'}{y'} = \frac{\mathrm{sinha}\ .\ \sinh\tau_1\ .\ \cos u_1 + \cosh\tau_1\ .\ \sin u_1}{\mathrm{sinha}\ \sinh\tau_1\ .\ \sin u_1 - \cosh\tau_1\ .\ \cos u_1}.$$

Die rechte Seite ist nur von u_1 abhängig, also liegen die Krümmungslinien $u_1 = c$ in Ebenen, die durch die z' Achse gehen.

Ferner erhält man:

$$x'^2 + y'^2 + \left(z' - Ru_2 - \frac{R}{\mathrm{cosha}} \cot\tau_2\right)^2 = \frac{R^2\cot^2\tau_2}{\cosh^2 a}.$$

Die Krümmungslinien $u_2 = c$ liegen demnach auf einer Kugel vom Radius $\frac{R\cot\tau_2}{\mathrm{cosha}}$. Der Mittelpunkt befindet sich jedesmal auf der z' Achse, und zwar um $Ru_2 + \frac{R}{\mathrm{cosha}}\ .\ \cot\tau_2$ vom Koordinatenanfangspunkt entfernt.

Abschnit VI.

Untersuchung der Spezialfälle, besonders der Rotationsflächen.

Die in den vorigen Abschnitten entwickelten Gleichungen der Schraubenfächen lassen sich nach verschiedenen Richtungen hin vereinfachen, wenn wir über die Werte ihrer Konstanten bestimmte Voraussetzungen treffen. Wie schon bemerkt, verwandeln sich die Schraubenflächen in Rotationsflächen, sofern der Parameter m der Schraubung verschwindet. Die Rotationsflächen sind also gegeben durch:

$$\text{I.} \begin{cases} x = \varrho \cos\vartheta, \\ y = \varrho \sin\vartheta, \\ z = \pm \int \partial\varrho\ .\ \sqrt{\dfrac{\varrho^2 + R^2 - C}{C - \varrho^2}}, \text{ wenn } K = + \dfrac{1}{R^2}. \end{cases}$$

$$\text{II.} \begin{cases} x = r \cos u, \\ y = r \sin u, \\ z = \mp \int \dfrac{(r^2 + M\ .\ N)\ \partial r}{\sqrt{(M^2 - r^2)\ (r^2 - N^2)}}, \text{ wenn } H = \pm \dfrac{1}{R}. \end{cases}$$

Diese Formeln gelten für jeden Wert von R, mithin auch dann noch, wenn $R = \infty$ wird. Damit aber in den Gleichungen I z selbst endlich bleibt, muß man auch $C = \infty$ annehmen. Setzt man noch voraus, daß $\lim\limits_{\substack{R=\infty \\ C=\infty}} \frac{R^2}{C} = k^2$ ist, so wird: $z = \pm \int \sqrt{k^2 - 1}\ \partial\varrho = \pm \sqrt{k^2 - 1}\ \varrho$. Man erhält darum als abwickelbare Rotationsfläche den Kegel: $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{k^2 - 1}$. Ebenso darf man auch in den Gleichungen II $R = \infty$ setzen, wenn zugleich mit R auch M, d. h. $R + \sqrt{C}$ unendlich groß wird, während N, d. h. $R - \sqrt{C}$ endlich bleibt. Es wird in diesem Falle:

$$z = \int \frac{N\ \partial r}{\sqrt{r^2 - N^2}} = N \log \frac{r + \sqrt{r^2 - N^2}}{N}.$$

Die Meridiankurve ist also die Kettenlinie, die Fläche selbst ist die unter dem Namen Katenoid bekannte Minimalfläche.

Ist dagegen R endlich, so stellen die Gleichungen I die gleichfalls wohlbekannten Rotationsflächen dar, die durch Verbiegung einer Kugel vom Radius R entstehen. Auf die Untersuchung der Flächen wollen wir darum an dieser Stelle nicht näher eingehen. Doch mögen die Rotationsflächen konstanter mittlerer Krümmung, die den Gleichungen II entsprechen, etwas ausführlicher behandelt werden, da ihre Meridiankurven wichtige geometrische Eigenschaften besitzen.

Wir unterscheiden drei Fälle:

$$\text{I. } R = \sqrt{C}, \quad \text{II. } R < \sqrt{C}, \quad \text{III. } R > \sqrt{C}, \text{ oder}$$
$$\text{I. } N = o, \quad \text{II. } N < o, \quad \text{III. } N > o.$$

Für $R^2 = C$ lautet die Gleichung der Meridiankurve: $z = \pm \int \frac{r\,\partial r}{\sqrt{4R^2 - r^2}}$. Das gibt eine Kugel vom Radius 2R. Im zweiten Falle erreicht die Kurve ein Maximum für $r = \sqrt{C - R^2}$, während im dritten Falle ein Wendepunkt eintritt, sofern $r = \sqrt{R^2 - C}$ ist. Wenn man noch beachtet, daß für $r = R + \sqrt{C}$ und $r = \pm(\sqrt{C} - R)$ die Tangenten beider Kurven der z Achse parallel sind, so kann man ihre Gestalt leicht bestimmen. Durch Einführung elliptischer Funktionen erhalten die den beiden letzten Fällen entsprechenden Flächen die Gleichungen:

$$r = M\,\mathrm{dn}\tau, \qquad z = \pm\left[N\tau + M\,.\,\mathrm{E}(\tau)\right], \text{ wo } \varkappa^2 = \frac{M^2 - N^2}{M^2}.$$

Ihre Meridiankurven erwecken nun dadurch besonderes Interesse, daß sie sich als Rollkurven der Kegelschnitte darstellen lassen. Um diese Behauptung zu beweisen, gehen wir aus von den Differentialgleichungen der Rollkurven:

$$\xi - x = \pm \frac{\varrho \frac{\partial\eta}{\partial\xi}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)^2}}, \qquad \eta = \mp \frac{\varrho}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)^2}}, \qquad \varrho \frac{\partial\eta}{\partial\xi} = \pm \frac{\partial\varrho}{\partial\vartheta}.$$

ξ und η stellen die Koordinaten eines Punktes der Rollkurve dar, x den Abstand des Berührungspunktes vom Anfangspunkte, schließlich ϱ und ϑ die Polarkoordinaten eines Punktes der rollenden Kurve. Setzt man $\eta = r$, $\xi = z$, so lauten die beiden letzten Gleichungen:

$$r = \frac{\mp\varrho}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial r} = \pm \frac{\varrho}{\frac{\partial\varrho}{\partial\vartheta}}.$$

Dazu nehmen wir die Polargleichung der Kegelschnitte: $\varrho = \frac{p}{1 + \lambda\cos\vartheta}$. Folglich:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \pm \frac{1 + \lambda\cos\vartheta}{\lambda\sin\vartheta}, \quad r = \mp \frac{p}{\sqrt{1 + \lambda^2 + 2\lambda\cos\vartheta}}.$$

Durch Umformung der letzten Gleichung erhält man: $1 + \lambda\cos\vartheta = \frac{p^2 + (1 - \lambda^2)\,r^2}{2r^2}$,

$$2\cos\frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{p^2 - r^2(1 - \lambda)^2}{\lambda}}, \quad 2\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{(1 + \lambda)^2 r^2 - p^2}{\lambda}},$$

$$\lambda\sin\vartheta = \frac{1}{2r^2}\,.\,\sqrt{[p^2 - r^2(1 - \lambda)^2]\,.\,[(1 + \lambda)^2 r^2 - p^2]}.$$

Schließlich
$$\frac{\partial z}{\partial r} = \pm \frac{p^2 + (1 - \lambda^2)\,r^2}{\sqrt{[p^2 - r^2(1 - \lambda)^2]\,.\,[(1 + \lambda)^2 r^2 - p^2]}}.$$

$$z = \pm \int \frac{(r^2 + M\,.\,N)\,\partial r}{\sqrt{(M^2 - r^2)(r^2 - N^2)}}, \quad M = \frac{p}{1 - \lambda}, \quad N = \frac{p}{1 + \lambda},$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist. Ferner sieht man, daß $M\,.\,N < o$ wird, wenn $\lambda > 1$,

wenn also die Rollkurve durch die Bewegung einer Hyperbel entsteht. Rollt dagegen eine Ellipse, so $\lambda < 1$, mithin auch $M . N > o$. Dem speziellen Wert $\lambda = 1$ entspricht wieder das Katenoid. Unsere Untersuchungen führen uns also auf den Delaunayschen Satz:

Rollt eine Ellipse oder eine Hyperbel in einer Ebene auf einer Geraden, so beschreibt jeder Brennpunkt die Meridiankurve einer Rotationsfläche konstanter mittlerer Krümmung, deren Rotationsachse die feste Gerade ist.

Wie in den Gleichungen der Rotationsflächen kann man auch in denjenigen der Schraubenflächen $R = \infty$ annehmen. Man erhält dann zwei weitere Spezialfälle. Die Schraubenflächen der ersten Gruppe sind auf die Ebene abwickelbar, diejenigen der zweiten müssen wieder Minimalflächen werden. Um die Gleichung $z = m\vartheta + \varphi(\varrho)$ in der angegebenen Weise zu spezialisieren, gehen wir am besten von der Form aus, welche die Ableitung im 4. Abschnitt für $\varphi'(\varrho)$ ergab.

$$\text{Nämlich} \quad \varphi'(\varrho) = \pm \frac{1}{\varrho} \sqrt{\frac{\varrho^4 + \varrho^2\left(R^2 + 2m^2 - \frac{R^2}{k^2}\right) - \frac{R^2 m^2}{k^2} + m^4}{\frac{R^2 - k^2 m^2}{k^2} - \varrho^2}}.$$

Setzt man darin $R = \infty$, so wird

$$\varphi(\varrho) = \int \frac{\partial\varrho}{\varrho} \sqrt{k^2\varrho^2 - \varrho^2 - m^2} \doteq \sqrt{\varrho^2 (k^2 - 1) - m^2} - m \arccos\left(\frac{m}{\varrho\sqrt{k^2 - 1}}\right).$$

Die Fläche ist also gegeben durch:

$$x = \varrho \cos\vartheta, \quad y = \varrho \sin\vartheta, \quad z = m\vartheta + \sqrt{\varrho^2 (k^2 - 1) - m^2} - m \arccos\left(\frac{m}{\varrho\sqrt{k^2 - 1}}\right).$$

Durch Elimination von ϱ und ϑ erhält man:

$$x \cos\left[\frac{z}{m} - \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)(k^2 - 1) - m^2}}{m}\right] + y \sin\left[\frac{z}{m} - \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)(k^2 - 1) - m^2}}{m}\right] = \frac{m}{\sqrt{k^2 - 1}}.$$

Die Erzeugenden dieser abwickelbaren Schraubenfläche sind die Tangenten der cylindrischen Schraubenlinie.

Die Flächen der zweiten Gruppe sind gegeben durch:

$$x = r \cos u, \quad y = r \sin u, \quad z = mu \mp \int \frac{N\sqrt{r^2 + m^2}\,\partial r}{r\sqrt{r^2 - N^2}}.$$

Diese Formeln gehen aus den allgemeinen Gleichungen hervor, wenn mit R sich auch M der Grenze ∞ nähert, doch N seine endlichen Werte beibehält. Sie stellen die von Scherk gefundenen Minimal-Schraubenflächen dar. Der besondere Wert $N = o$ gibt die Minimal-Schraubenregelfläche. Diese ist nach dem Satz von Catalan die einzige Linienfläche, die zugleich Minimalfläche ist.

Abschnitt VII.

Untersuchung der allgemeinen Gleichungen.

Bevor wir die allgemeinen Gleichungen untersuchen, müssen wir die in ihnen auftretenden elliptischen Integrale auf die Normalintegrale zurückführen.

$$\text{I.} \quad \begin{cases} x = \varrho \cos\vartheta, \\ y = \varrho \sin\vartheta, \\ z = m\vartheta \pm \int \frac{\partial\varrho}{\varrho} \cdot \sqrt{\frac{(\varrho^2 + A)(\varrho^2 - B)}{C - \varrho^2}}. \end{cases}$$

$$\text{II.}\begin{cases} x = r\cos u, \\ y = r\sin u, \\ z = mu \mp \int \dfrac{(r^2 + M\,.\,N)\sqrt{r^2 + m^2}\,\partial r}{r\sqrt{(M^2 - r^2)(r^2 - N^2)}}. \end{cases}$$

Substituieren wir $C - \varrho^2 = (C - B)\,\mathrm{sn}^2\tau$, so nehmen die Gleichungen I die Form an:

$$\text{I.}\begin{cases} x = \varrho\cos\upsilon, \\ y = \varrho\sin\upsilon, \\ z = m\upsilon \mp (C - B)\sqrt{A + C}\int \dfrac{\mathrm{cn}^2\tau\,.\,\mathrm{dn}^2\tau}{\varrho^2}\,\partial\tau, \text{ wo } \varrho^2 = C - (C - B)\,\mathrm{sn}^2\tau,\ \varkappa^2 = \dfrac{C - B}{C + A}; \end{cases}$$

oder

$$\text{I.}\begin{cases} x = \varrho\cos\upsilon, \\ y = \varrho\sin\upsilon, \\ z = m\upsilon \pm \left[\dfrac{B}{\sqrt{A + C}}\tau - \sqrt{A + C}\,\mathrm{E}_{(\tau)} + \dfrac{A\,.\,B}{C\,.\,\sqrt{A + C}}\,.\,\prod\left(\tau, -\dfrac{C - B}{C}\right)\right].^* \end{cases}$$

Setzt man ferner $M^2 - r^2 = (M^2 - N^2)\,\mathrm{sn}^2\tau$, so sind die Schraubenflächen konstanter mittlerer Krümmung gegeben durch:

$$\text{II.}\begin{cases} x = r\cos u, \\ y = r\,.\,\sin u, \\ z = mu \pm (M + N)\sqrt{M^2 + m^2}\int \dfrac{[M - (M - N)\,\mathrm{sn}^2\tau]\,\mathrm{dn}^2\tau\partial\tau}{r^2}, \text{ wo } r^2 = M^2 - (M^2 - N^2)\,\mathrm{sn}^2\tau, \end{cases}$$

$$\varkappa^2 = \frac{M^2 - N^2}{M^2 + m^2};\ \text{oder}$$

$$\text{II.}\begin{cases} x = r\cos u, \\ y = r\sin u, \\ z = mu \pm \left[\dfrac{M\,.\,N}{\sqrt{M^2 + m^2}}\tau + \sqrt{M^2 + m^2}\,.\,\mathrm{E}_{(\tau)} + \dfrac{m^2\,.\,N}{M\sqrt{M^2 + m^2}}\,.\,\prod\left(\tau, -\dfrac{M^2 - N^2}{M^2}\right)\right]. \end{cases}$$

In den Gleichungen I treten immer elliptische Integrale auf, wie beschaffen auch die Konstanten sein mögen, vorausgesetzt, daß R und m endlich sind. Darin unterscheiden sich diese Flächen von den Schraubenflächen konstanter negativer Totalkrümmung. Die Integrationen, welche die letzteren erfordern, lassen sich in einem besonderen Falle ausführen. Wir meinen damit die Dinischen Schraubenflächen, die bekanntlich eine Traktrix als Meridiankurve besitzen. Daß die ihnen entsprechenden Schraubenflächen konstanter positiver Totalkrümmung imaginär sind, war schon gezeigt.

Die Gestalt der Achsenschnitte läßt sich leicht bestimmen. Es ist überhaupt nur ein Kurventypus möglich. Die Meridiankurve $z = \varphi(\varrho)$ berührt stets die Parallele zur z Achse »$\varrho^2 = C$«, während für $\varrho^2 = B$ die Tangente senkrecht auf der z Achse steht. Singularitäten sind nicht vorhanden [Fig. I]. Bei der Abwickelung dieser Schraubenflächen auf die Kugel fallen die Schraubenlinien mit den Parallelkreisen derselben zusammen, während sich die geodätischen Linien

$$»\upsilon + m\int \frac{\varphi'(\varrho)\,\partial\varrho}{\varrho^2 + m^2} = \text{konstant}«$$

in die Meridiankurven der Kugel verwandeln.

Die Flächen II lassen sich ebenfalls nur durch elliptische Integrale darstellen, doch haben wir hier drei verschiedene Fälle zu unterscheiden:

I. $N = 0$, II. $N < 0$, III. $N > 0$, oder
I. $R = \sqrt{C}$, II. $R < \sqrt{C}$, III. $R > \sqrt{C}$.

Für $R = \sqrt{C}$ vereinfachen sich die Gleichungen außerordentlich.

* $\prod_{(u,\,n)} = \int_0^u \dfrac{\partial u}{1 + n\,\mathrm{sn}^2 u}$ stellt die Legendresche Form der Normalintegrale dritter Gattung dar.

$$\text{Man erhält:} \quad \psi(r) = \mp \int \frac{\sqrt{r^2 + m^2}\, dr}{\sqrt{4\, R^2 - r^2}} \quad \text{(Fig. II).}$$

Dieser Ausdruck hat große Ähnlichkeit mit der Gleichung, durch welche die Meridiankurven der Rotationsflächen konstanter positiver Totalkrümmung bestimmt sind. Dieselbe lautet:

$$\varphi(\varrho) = \pm \int \sqrt{\frac{\varrho^2 + R^2 - C}{C - \varrho^2}}\, d\varrho.$$

Nimmt man an, daß in der letzten Gleichung $R^2 > C$ ist, ersetzt man ferner in der ersten R durch R_1, so werden die beiden Ausdrücke identisch, wenn man einführt $4R_1{}^2 = C$, $m^2 = R^2 - C$. Also ist in der Tat der Achsenschnitt einer solchen Schraubenfläche nichts anderes als die Meridiankurve einer Rotationsfläche konstanter positiver Totalkrümmung. Bei der Reduktion auf die Normalintegrale verschwinden in den Gleichungen dieser speziellen Fläche die Integrale dritter Gattung.

$$\text{Man erhält:} \quad r = 2R\, .\, \mathrm{cn}\tau, \quad \psi(r) = \pm \sqrt{4R^2 + m^2}\, \mathrm{E}(\tau), \quad \varkappa^2 = \frac{4R^2}{4R^2 + m^2}.$$

Wird nun im zweiten Falle $R < \sqrt{C}$, so erreicht die Kurve ein Maximum, wenn $r^2 = C - R^2$ wird, ferner berührt sie die beiden Linien $r = \sqrt{C} + R$ und $r = \sqrt{C} - R$. (Fig. III.)

Auch im dritten Falle, wenn $R > \sqrt{C}$, wird der Differentialquotient $\psi'(r)$ zweimal unendlich für $r = R + \sqrt{C}$ und $r = R - \sqrt{C}$. Die Kurve berührt also wieder die beiden Linien $r = R + \sqrt{C}$ und $r = R - \sqrt{C}$. Da aber zwischen den Berührungspunkten kein Maximum und Minimum liegt, so besitzt die Kurve in diesem Intervall einen Wendepunkt. (Fig. IV.)

Abschnitt VIII.

Die Hauptkrümmungsradien.

Im zweiten Abschnitt unserer Abhandlung waren schon die Hauptkrümmungsradien der beiden Flächengattungen berechnet. Sie waren dargestellt als Funktionen der Größe τ. Da nun aber τ durch ϱ beziehungsweise durch r bestimmt ist, so kann man auch die Hauptkrümmungsradien durch diese Parameter, durch ϱ oder durch r, ausdrücken. Doch wollen wir einen andern Weg einschlagen und direkt die Werte der Hauptkrümmungsradien berechnen. Bezeichnen wir wieder die Hauptkrümmungsradien der Schraubenflächen konstanter positiver Totalkrümmung mit ϱ_1 und ϱ_2, so sind diese die Wurzeln der beiden Gleichungen:

$$\text{I.} \quad \frac{1}{\varrho_1} \cdot \frac{1}{\varrho_2} = \frac{d\, .\, d'' - d'^2}{eg - f^2}, \qquad \text{II.} \quad \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{2fd' - ed'' - gd}{eg - f^2}, \text{ oder}$$

$$\text{I.} \quad \frac{1}{\varrho_1} \cdot \frac{1}{\varrho_2} = \frac{\varrho^3\, \varphi'(\varrho)\, .\, \varphi''(\varrho) - m^2}{(\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho))^2},$$

$$\text{II.} \quad \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{-\, 2m^2\, \varphi'(\varrho) - \varrho^2\varphi'(\varrho)\,(1 + \varphi'^2(\varrho)) - \varrho\,(\varrho^2 + m^2)\, .\, \varphi''(\varrho)}{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}^3}.$$

Der Wert der rechten Seite von I ist unmittelbar gegeben, er ist gleich $\frac{1}{R^2}$. Um die rechte Seite von II zu bestimmen, hat man den Wert von $\varphi'(\varrho)$ in diese einzusetzen. Doch ist es vorteilhaft, zuvor die Größe $\varphi''(\varrho)$ mit Hilfe der ersten Gleichung zu eliminieren. Wir schreiben darum:

$$\text{I.} \quad \varrho^3\varphi'(\varrho)\, .\, \varphi''(\varrho) = m^2 + \frac{1}{R^2}\,(\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho))^2, \text{ da } \frac{1}{\varrho_1} \cdot \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{R^2}.$$

$$\text{II.} \quad \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = -\, \frac{\varrho^2\varphi'^2(\varrho)\,(\varrho^2\varphi'^2(\varrho) + \varrho^2 + m^2) + m^2\varrho^2\varphi'^2(\varrho) + \varrho^3\,(\varrho^2 + m^2)\, \varphi'(\varrho)\, .\, \varphi''(\varrho)}{\varrho^2\varphi'(\varrho)\, \sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}^3}.$$

Setzt man den durch I bestimmten Wert von $\varrho^3\varphi'(\varrho)\varphi''(\varrho)$ in II ein und kürzt man den Bruch durch $\varrho^2+m^2+\varrho^2\varphi'^2(\varrho)$, so wird:

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=-\frac{\varrho^2\varphi'^2(\varrho)+m^2+\frac{1}{R^2}(\varrho^2+m^2+\varrho^2\varphi'^2(\varrho))(\varrho^2+m^2)}{\varrho^2\varphi'(\varrho)\sqrt{\varrho^2+m^2+\varrho^2\varphi'^2(\varrho)}}.$$

Nun ist $\varrho^2+m^2+\varrho^2\varphi'^2(\varrho)=\dfrac{R^2\varrho^2}{C-\varrho^2}$, $\quad \varrho^2\varphi'^2(\varrho)+m^2=\dfrac{\varrho^2}{C-\varrho^2}(\varrho^2+A-B-m^2)$.

Also $\dfrac{1}{\varrho_1}+\dfrac{1}{\varrho_2}=\dfrac{2\varrho^2+A-B}{R\,.\sqrt{(\varrho^2+A)(\varrho^2-B)}}$, sofern man den negativen Wert von $\varphi'(\varrho)$ wählt.

$$\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}\right)^2=\frac{(2\varrho^2+A-B)^2-4(\varrho^2+A)(\varrho^2-B)}{R^2(\varrho^2+A)(\varrho^2-B)}.$$

$$\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}=\pm\frac{1}{R}\frac{A+B}{\sqrt{(\varrho^2+A)(\varrho^2-B)}},$$

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=\frac{2\varrho^2+A-B}{R\sqrt{(\varrho^2+A)(\varrho^2-B)}}.$$

Beschränkt man sich nur auf das — Zeichen, so wird:

$$\frac{1}{\varrho_1}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{\varrho^2-B}{\varrho^2+A}}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{C-B}{A+C}}\frac{\mathrm{cn}\tau}{\mathrm{dn}\tau},\qquad \frac{1}{\varrho_2}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{\varrho^2+A}{\varrho^2-B}}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{A+C}{C-B}}\frac{\mathrm{dn}\tau}{\mathrm{cn}\tau}.$$

Das + Zeichen würde nur eine Vertauschung der Größen ϱ_1 und ϱ_2 zur Folge haben. Sind ϱ_1 und ϱ_2 bekannt, so lassen sich auch die Hauptkrümmungsradien der Parallelflächen konstanter mittlerer Krümmung bestimmen.

$$r_1=\varrho_1\pm R,\qquad r_2=\varrho_2\pm R.$$

$$r_1=R\left(\sqrt{\frac{\varrho^2+A}{\varrho^2-B}}\pm 1\right),\qquad r_2=R\left(\sqrt{\frac{\varrho^2-B}{\varrho^2+A}}\pm 1\right).$$

Das obere Zeichen gilt, wenn die mittlere Krümmung positiv ist, das — Zeichen dagegen gehört zur Fläche mit negativer mittlerer Krümmung. Nun ist

$$\sqrt{\varrho^2+A}=\frac{r^2+A+B+m^2}{2\sqrt{r^2+m^2}},\qquad \sqrt{\varrho^2-B}=\pm\frac{r^2-A-B+m^2}{2\sqrt{r^2+m^2}}.$$

Um festzustellen, welches Zeichen der letzte Ausdruck erhalten muß, ersetzen wir in der Gleichung

$$r^2=\varrho^2\left[1\mp\frac{R\,\varphi'(\varrho)}{\sqrt{\varrho^2+m^2+\varrho^2\varphi'^2(\varrho)}}\right]^2+\frac{R^2m^2}{\varrho^2+m^2+\varrho^2\varphi'^2(\varrho)}$$

$\varphi'(\varrho)$ durch den uns wohlbekannten Wert, wir dürfen aber nur das negative Zeichen von $\varphi'(\varrho)$ berücksichtigen, da auch ϱ_1 und ϱ_2 unter dieser Voraussetzung berechnet sind. Also

$$r^2=2\varrho^2+A-B-m^2\pm 2\sqrt{(\varrho^2+A)(\varrho^2-B)},$$

wobei das + oder — Zeichen zu wählen ist, je nachdem $H>0$ oder $H<0$ ist. Man übersieht leicht, daß im ersten Falle r^2 immer $>A+B-m^2$ ist, im anderen Falle wird dagegen r^2 stets kleiner als dieser Betrag sein. Folglich müssen wir setzen:

$$\sqrt{\varrho^2-B}=+\frac{r^2-A-B+m^2}{2\sqrt{r^2+m^2}},\quad \text{wenn } H>0;$$

$$\sqrt{\varrho^2-B}=-\frac{r^2-A-B+m^2}{2\sqrt{r^2+m^2}},\quad \text{wenn } H<0.$$

$$r_1=\pm R\left(\frac{r^2+A+B+m^2}{r^2-A-B+m^2}+1\right)=\pm R\frac{2(r^2+m^2)}{r^2-A-B+m^2}.$$

$$r_2=\pm R\left(\frac{r^2-A-B+m^2}{r^2+A+B+m^2}+1\right)=\pm R\frac{2(r^2+m^2)}{r^2+A+B+m^2}.$$

$$\frac{1}{r_1}=\pm\frac{r^2-A-B+m^2}{2R(r^2+m^2)},\qquad \frac{1}{r_2}=\pm\frac{r^2+A+B+m^2}{2R(r^2+m^2)}.$$

Da ϱ_1 und ϱ_2 stets dasselbe Zeichen haben, so sind alle Punkte unserer Flächen konstanter positiver Totalkrümmung elliptisch, eine Eigenschaft, die allen Verbiegungsflächen der Kugel zukommt. Die zweite Flächengattung besitzt dagegen nur elliptische Punkte, wenn $r^2 > A + B - m^2$ ist, denjenigen Werten von r^2 aber, die kleiner sind als $A + B - m^2$, entsprechen hyperbolische Punkte. Die Schraubenlinie $r^2 = A + B - m^2$ teilt die ganze Fläche in zwei Zonen. Alle Punkte, die auf dieser Kurve liegen, sind parabolisch; die eine Zone hat nur elliptische, die andere nur hyperbolische Punkte. Ebenso muß die Totalkrümmung der zweiten Flächengattung positiv oder negativ sein, je nachdem r^2 größer oder kleiner als $A + B - m^2$ ist. Die Totalkrümmung der Schraubenflächen konstanter mittlerer Krümmung ist nämlich gegeben durch:

$$K = \frac{(r^2 + A + B + m^2)\,(r^2 - A - B + m^2)}{4R^2\,(r^2 + m^2)^2}.$$

Aus den allgemeinen Gleichungen erhält man leicht die Hauptkrümmungsradien der Minimal-Schraubenflächen:

$$\frac{1}{r_1} = \mp \frac{\sqrt{m^2 + N^2}}{r^2 + m^2}, \qquad \frac{1}{r_2} = \pm \frac{\sqrt{m^2 + N^2}}{r^2 + m^2},$$

und daraus die Hauptkrümmungsradien der Schraubenregelfläche:

$$\frac{1}{r_1} = \mp \frac{m}{r^2 + m^2}, \qquad \frac{1}{r_2} = \pm \frac{m}{r^2 + m^2}.$$

Wenn wir $m = o$ setzen, so haben wir zu unterscheiden, ob R^2 größer oder kleiner als C ist. Im ersten Falle wird nämlich $B = o$, $A = R^2 - C$, im zweiten dagegen $A = O$, $B = C - R^2$.

Dementsprechend erhalten wir für die Hauptkrümmungsradien der Rotationsflächen die Werte:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\varrho_1} &= \frac{\varrho}{R\sqrt{\varrho^2 + R^2 - C}}, & \frac{1}{\varrho_2} &= \frac{\sqrt{\varrho^2 + R^2 - C}}{R\varrho}. \\ \frac{1}{r_1} &= \pm \frac{r^2 - (R^2 - C)}{2Rr^2}, & \frac{1}{r_2} &= \pm \frac{r^2 + (R^2 - C)}{2Rr^2}. \end{aligned}\right\} \; R^2 > C.$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\varrho_1} &= \frac{\sqrt{\varrho^2 + R^2 - C}}{R\varrho}, & \frac{1}{\varrho_2} &= \frac{\varrho}{R\sqrt{\varrho^2 + R^2 - C}}. \\ \frac{1}{r_1} &= \pm \frac{r^2 + (R^2 - C)}{2Rr^2}, & \frac{1}{r_2} &= \pm \frac{r^2 - (R^2 - C)}{2Rr^2}. \end{aligned}\right\} \; R^2 < C.$$

Abschnitt IX.

Die Krümmungslinien.

Nachdem die Hauptkrümmungsradien bestimmt sind, bietet die Ableitung der Krümmungslinien keine Schwierigkeiten. Wir beginnen wieder mit den Flächen konstanter Totalkrümmung und berücksichtigen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} {}^{*}\ (E\partial\varrho + F\partial\upsilon) &= -\varrho_k\,(D\partial\varrho + D'\partial\upsilon), \\ (F\partial\varrho + G\partial\upsilon) &= -\varrho_k\,(D'\partial\varrho + D''\partial\upsilon). \end{aligned}$$

Da die Hauptkrümmungsradien ϱ_k schon bekannt sind, so genügt eine Gleichung, zum Beispiel die letzte. Wir lösen diese nach $\frac{\partial\upsilon}{\partial\varrho}$ auf und erhalten:

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial\varrho} = -\frac{F + \varrho_k\,.\,D'}{G + \varrho_k\,D''} = -\frac{m\varphi'(\varrho) - \dfrac{m\,.\,\varrho_k}{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}}}{\varrho^2 + m^2 + \varrho_k\,\dfrac{\varrho^2\varphi'(\varrho)}{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}}}.$$

* Stahl und Kommerell, pag. 17. — An dieser Stelle sind ausnahmsweise auch die Fundamentalgrößen der ersten Flächengattung mit großen Buchstaben bezeichnet, weil das Zeichen ∂ der Fundamentalgrößen 2. Ordnung leicht mit dem Differentationszeichen verwechselt werden kann.

Nehmen wir nun an, daß $\varrho_k = \varrho_1$ ist, und beschränken wir uns wieder nur auf das negative Zeichen von $\varphi'(\varrho)$, so wird:

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial \varrho} = \frac{C - B}{m^2 - A} \cdot \frac{m}{\varrho} \cdot \sqrt{\frac{\varrho^2 + A}{(\varrho^2 - B)(C - \varrho^2)}}, \text{ zu } \varrho_1 \text{ gehörig,}$$

oder, da $C = \frac{A \cdot B}{m^2}$, so ist $\frac{\partial \upsilon}{\partial \varrho} = -\frac{B}{m\varrho}\sqrt{\frac{\varrho^2 + A}{(\varrho^2 - B)(C - \varrho^2)}}$, zu ϱ_1 gehörig.

Ebenso $\frac{\partial \upsilon}{\partial \varrho} = \frac{A}{m \cdot \varrho}\sqrt{\frac{\varrho^2 - B}{(\varrho^2 + A)(C - \varrho^2)}}$, zu ϱ_2 gehörig.

$$\upsilon = -\frac{B}{m}\int \frac{\varrho\, \partial\varrho}{\sqrt{(\varrho^2 + A)(\varrho^2 - B)(C - \varrho^2)}} - C\, m \int \frac{\partial \varrho}{\varrho \cdot \sqrt{(\varrho^2 + A)(\varrho^2 - B)(C - \varrho^2)}} + C_1.$$

$$\upsilon = \frac{A}{m}\int \frac{\varrho\, \partial\varrho}{\sqrt{(\varrho^2 + A)(\varrho^2 - B)(C - \varrho^2)}} - C\, m \int \frac{\partial \varrho}{\varrho \cdot \sqrt{(\varrho^2 + A)(\varrho^2 - B)(C - \varrho^2)}} + C_2.$$

Da zwei Parallelflächen die Normalen gemeinsam haben, so besitzen sie auch entsprechende Krümmungslinien. Man könnte also aus diesen Gleichungen auch die Krümmungslinien der zweiten Flächengattung ableiten. Doch führt der direkte Weg schneller zum Ziele. Wir wollen diesmal unserer Rechnung die Gleichung zu Grunde legen, die für die Krümmungslinien gewöhnlich angegeben wird:

$$(E\, D' - F\, D)\, \partial r^2 + (E\, D'' - GD)\, \partial r\, \partial u + (FD'' - GD')\, \partial u^2, \text{ oder}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{ED'' - GD}{2\,(FD'' - GD')} \pm \frac{1}{2\,(FD'' - GD')} \cdot \sqrt{(ED'' - GD)^2 - 4(ED' - FD)(FD'' - GD')}.$$

*Die Diskriminante $(ED'' - GD)^2 - 4(ED' - FD)(FD'' - GD')$ läßt sich bekanntlich auf die Form bringen: $(EG - F^2)^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^2$. Also wird der zweite Teil der Gleichung:

$$\frac{EG - F^2}{2\,(FD'' - GD')} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

$$FD'' - GD' = \frac{mr^2\, \psi'^2(r) + m\,(r^2 + m^2)}{\sqrt{r^2 + m^2 + r^2\psi'^2(r)}} = m \cdot \sqrt{r^2 + m^2 + r^2\psi'^2(r)},$$

oder $FD'' - GD' = m\sqrt{EG - F^2}$.

$$\frac{EG - F^2}{2\,(FD'' - GD')} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{2m} \cdot \sqrt{r^2 + m^2 + r^2\psi'^2(r)}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \mp \frac{A + B}{R\,(r^2 + m^2)}, \quad r^2 + m^2 + r^2\psi'^2(r) = \frac{4\, R^2 r^2\,(r^2 + m^2)}{[(R + \sqrt{C})^2 - r^2]\,[r^2 - (R - \sqrt{C})^2]}.$$

Folglich nimmt der zweite Teil der Gleichung (der absolute Wert) die Form an:

$$\frac{(A + B) \cdot r}{m\sqrt{r^2 + m^2} \cdot \sqrt{[(R + \sqrt{C})^2 - r^2]\,[r^2 - (R - \sqrt{C})^2]}}.$$

Um $\frac{ED'' - GD}{2\,(FD'' - GD')}$ zu berechnen, berücksichtigen wir die Gleichung:

$$\frac{2\, FD' - ED'' - GD}{EG - F^2} = \frac{1}{R}.$$

Der Einfachheit halber haben wir angenommen, daß $H > o$ ist.

$$\text{Also } - GD = \frac{1}{R}\,(EG - F^2) + ED'' - 2F\, D'.$$

$$\frac{ED'' - GD}{2\,(FD'' - GD')} = \frac{\frac{1}{R}\,(EG - F^2) + 2\, ED'' - 2\, FD'}{2\,(FD'' - GD')},$$

* Stahl und Kommerell, pag. 18.

$$\frac{ED'' - GD}{2\,(FD'' - GD')} = \frac{\frac{1}{R} \cdot \sqrt{EG - F^2}^3 + 2\,(1 + \psi'^2(r))\, r^2\psi'(r) + 2\, m^2\psi'(r)}{2\, m\,(EG - F^2)},$$

$$= \frac{\frac{1}{R}\sqrt{EG - F^2} + 2\,\psi'(r)}{2\, m},$$

$$= \frac{C - R^2}{r\,.\,m} \frac{\sqrt{r^2 + m^2}}{\sqrt{[(R + \sqrt{C})^2 - r^2]\;[r^2 - (R - \sqrt{C})^2]}}.$$

Die Krümmungslinien der Schraubenflächen konstanter mittlerer Krümmung sind demnach gegeben durch:

$$u = \frac{R^2 - C}{m} \cdot \int \frac{\sqrt{r^2 + m^2}\,\partial r}{r\sqrt{[(R + \sqrt{C})^2 - r^2]\,[r^2 - (R - \sqrt{C})^2]}}$$

$$\pm \frac{A + B}{m} \int \frac{r\partial r}{\sqrt{r^2 + m^2} \cdot \sqrt{[(R + \sqrt{C})^2 - r^2]\,[r^2 - (R - \sqrt{C})^2]}} + C_1.$$

Wird die mittlere Krümmung negativ, so verändern sich nur die Vorzeichen.

Diesen Gleichungen, welche die Krümmungslinien der beiden Flächengattungen darstellen, sind wir schon bei einer anderen Gelegenheit begegnet. Sie sind nämlich nichts anderes als die Formeln des zweiten Abschnittes, die dazu dienten, die Fundamentalgrößen zu transformieren. Es ist nur eine einfache Umformung nötig, um die Identität der Formelgruppen nachzuweisen.

Mit Hilfe der aufgestellten Gleichungen können wir auch die endlichen Gleichungen der Schraubenflächen durch die Parameter der Krümmungslinien ausdrücken. Doch wird sich die Rechnung im allgemeinen nicht lohnen, da die Formeln dann wenig übersichtlich werden. Nur die eine Schraubenfläche konstanter mittlerer Krümmung, die dem Fall I entspricht, macht hierin eine Ausnahme. Setzt man nämlich $C = R^2$, so lauten die Gleichungen der Krümmungslinien:

$$u = \pm\sqrt{m^2 + 4R^2} \int \frac{\partial r}{\sqrt{(r^2 + m^2)\,(4R^2 - r^2)}} + C_1.$$

Bezeichnet man nun die zu den beiden Systemen der Krümmungslinien gehörigen Konstanten mit U und V und substituiert man wieder $r = 2R\,\mathrm{cn}\tau$, so wird:

$$u = -\tau + U, \quad u = \tau + V. \qquad \text{Also } u = \frac{U + V}{2}, \quad \tau = \frac{U - V}{2}.$$

Es sind mithin τ und u lineare Funktionen der Parameter U und V. In den Flächengleichungen:

$$x = 2R\,\mathrm{cn}\tau\,\cos u, \quad y = 2R\,\mathrm{cn}\tau\,\sin u, \quad z = mu \pm \sqrt{m^2 + 4R^2} \cdot E(\tau)$$

treten darum nur die Kombinationen $\frac{U + V}{2}$ und $\frac{U - V}{2}$ auf.

Zu einem wichtigen Ergebnis gelangt man durch die Berechnung der Winkel, welche die Schraubenlinien der Flächen konstanter mittlerer Krümmung mit den Krümmungslinien bilden. Der Winkel ϑ, der von einer beliebigen Flächenkurve und den Parameterkurven u_1 eingeschlossen wird, ist bekanntlich gegeben durch: $\cos\vartheta = \frac{F\partial u_1 + G\partial u_2}{\partial s\,.\,\sqrt{G}}$. Versteht man unter F und G die Fundamentalgrößen der zweiten Flächengattung, bezogen auf die Krümmungslinien, so ist $F = o$,

$$\partial s = \sqrt{G\;(\partial u_1^2 + \partial u_2^2)}, \quad \cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial u_2}\right)^2}}.$$

Wir wollen nun $\frac{\partial u_1}{\partial u_2}$ bestimmen für den Fall, daß die Flächenkurve eine Schraubenlinie ist. Der Wert dieses Verhältnisses folgt dann aus den Gleichungen:

$$u_1 = \pm \frac{1}{R \cdot m} \sqrt{\frac{A(C-B)}{C}} \cdot \int \frac{-r^2(2B+m^2)+m^2(A-B-m^2)}{r\sqrt{r^2+m^2}\sqrt{4Cr^2-(r^2-A+B+m^2)^2}} \partial r - \frac{1}{R}\sqrt{\frac{A(C-B)}{C}} \cdot u,$$

$$u_2 = \mp \frac{1}{Rm} \sqrt{\frac{B(A+C)}{C}} \cdot \int \frac{r^2(2A-m^2)+m^2(A-B-m^2)}{r\sqrt{r^2+m^2}\sqrt{4Cr^2-(r^2-A+B+m^2)^2}} \partial r + \frac{1}{R}\sqrt{\frac{B(A+C)}{C}} \cdot u.$$

In unserem Falle ist r = konstant, mithin

$$\left.\begin{aligned} \partial u_1 &= -\frac{1}{R}\sqrt{\frac{A(C-B)}{C}} \cdot \partial u, \\ \partial u_2 &= +\frac{1}{R}\sqrt{\frac{B(A+C)}{C}} \cdot \partial u. \end{aligned}\right\} \left(\frac{\partial u_1}{\partial u_2}\right)^2 = \frac{A(C-B)}{B(A+C)}.$$

$\cos\vartheta = \sqrt{\frac{B(A+C)}{C(A+B)}}$. Erinnern wir uns der Resultate des zweiten Abschnittes, so sehen wir, daß $\sqrt{\frac{B(A+C)}{C(A+B)}} = \sin\sigma$ ist.

$$\text{Also } \cos\vartheta = \sin\sigma,\ \vartheta = \frac{\pi}{2} - \sigma.$$

Damit ist die Bedeutung des Winkels σ, den wir im zweiten Abschnitt zur Abkürzung eingeführt hatten, bestimmt. Ferner können wir den Satz aufstellen:

Die Krümmungslinien der Schraubenflächen konstanter mittlerer Krümmung schneiden die Schraubenlinien unter konstantem Winkel.

Dieses Resultat ist die Verallgemeinerung eines Satzes, welcher die Schraubenregelflächen betrifft, und welcher aussagt, daß die Krümmungslinien dieser Flächen die Schraubenlinien unter einem Winkel von 45^0 schneiden.

Abschnitt X.

Die Bonnet-Liesche und die Hazzidakissche Transformation.

Im zweiten Abschnitt hatten wir nachgewiesen, daß zu jeder Lösung $\vartheta = \vartheta(u_1)$ der Fundamentalgleichung $\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial u_2^2} + \sinh\vartheta\cosh\vartheta = o$ noch eine zweite Lösung $\Theta = \vartheta(u_1\sin\sigma + u_2\cos\sigma)$ gehört. Allgemein kann man nun sagen: Genügt $\vartheta = \vartheta(u_1, u_2)$ unserer Differentialgleichung, so muß auch $\Theta = \vartheta(u_1\sin\sigma + u_2\cos\sigma, u_1\cos\sigma - u_2\sin\sigma)$ eine Lösung sein. Diese sogenannte Bonnet-Liesche Transformation erhält eine einfache geometrische Bedeutung, wenn man sie zu den Flächen konstanter mittlerer Krümmung in Beziehung setzt.

*Jede Fläche konstanter mittlerer Krümmung kann ohne Änderung der Hauptkrümmungsradien in jedem Punkte so verbogen werden, daß die unter einem beliebigen konstanten Winkel σ schneidenden Trajektorien der alten Krümmungslinien die neuen Krümmungslinien werden.

Da die Lösung $\vartheta = \vartheta(u_1)$ Rotationsflächen darstellt, die Lösung $\Theta = \vartheta(u_1\sin\sigma + u_2\cos\sigma)$ dagegen Schraubenflächen, so muß sich jede Rotationsfläche konstanter mittlerer Krümmung ohne Änderung der Hauptkrümmungsradien so in eine Schraubenfläche verbiegen lassen, daß die alten Krümmungslinien der Rotationsflächen diejenigen der Schraubenflächen unter dem konstanten Winkel σ

* Bianchi, pag. 490.

schneiden. Um das auch analytisch zu zeigen, suchen wir Rotationsflächen konstanter mittlerer Krümmung, die auf Schraubenflächen von derselben mittleren Krümmung abwickelbar sind.

Das Linienelement der Rotationsflächen mit der mittleren Krümmung $H = \pm\frac{1}{R}$ ist gegeben durch: $ds_1^2 = \frac{4R^2\,\varrho^2 d\varrho^2}{[(R+\sqrt{C_1})^2-\varrho^2]\,[\varrho^2-(R-\sqrt{C_1})^2]} + \varrho^2\,dv^2.$

Das Linienelement der Schraubenflächen von derselben mittleren Krümmung nimmt durch die Substitution: $u = ku_1 - m \,.\int \frac{\psi'(r)\,dr}{r^2+m^2}$ die Form an:

$$ds^2 = \frac{4R^2\,r^2 dr^2}{[(R+\sqrt{C})^2-r^2]\,[r^2-(R-\sqrt{C})^2]} + k^2(r^2+m^2)\,du_1^2.$$

Trifft man wieder die Voraussetzung, daß die Parameter u_1 und v identisch sind, so werden die Linienelemente einander gleich, wenn man setzt: $\varrho^2 = k^2(r^2+m^2)$,

$$k = \frac{2R}{\sqrt{(R+\sqrt{C})^2+m^2} \pm \sqrt{(R-\sqrt{C})^2+m^2}},$$

$$\sqrt{C_1} = R\,\frac{\sqrt{(R+\sqrt{C})^2+m^2} \mp \sqrt{(R-\sqrt{C})^2+m^2}}{\sqrt{(R+\sqrt{C})^2+m^2} \pm \sqrt{(R-\sqrt{C})^2+m^2}}.$$

Jede Schraubenfläche läßt sich also auf zwei verschiedene Rotationsflächen abwickeln, welche dieselbe mittlere Krümmung $H = \pm\frac{1}{R}$ besitzen. Bei der Verbiegung verwandeln sich die Schraubenlinien in die Parallelkreise der Rotationsflächen, sie werden also Krümmungslinien der letzteren. Da nun aber die Schraubenlinien die Krümmungslinien der Schraubenflächen unter konstantem Winkel schneiden, so stimmen diese Resultate mit den vorher über die Bonnet-Liesche Transformation angeführten Sätzen überein. Daß die Hauptkrümmungsradien sich bei der Verbiegung nicht verändern, läßt sich leicht feststellen, sofern man die im IX. Abschnitt berechneten Werte derselben berücksichtigt.

Eine Reihe anderer Sätze erhalten wir, wenn wir die Hazzidakissche Transformation auf unsere Flächen anwenden. Die Eigenschaften dieser Transformation lassen sich am besten aus folgendem Satz erkennen: *Von einer Biegungsfläche S der Kugel Σ mögen die Gaußische Abbildung auf Σ und die Bildkurven u_1 und u_2 der Krümmungslinien von S betrachtet werden. Dann kann die Kugel Σ in eine Fläche $\bar{S}$ so verbogen werden, daß die Bildkurven der Krümmungslinien von S wirkliche Krümmungslinien auf $\bar{S}$ werden. Für die Parallelflächen konstanter mittlerer Krümmung folgt aus dieser Transformation ebenfalls ein wichtiges Resultat: Die beiden Flächen konstanter mittlerer Krümmung, die im Sinne der Hazzidakisschen Transformation konjugiert sind, lassen sich so aufeinander abwickeln, daß die Krümmungslinien einander entsprechen und die Hauptkrümmungsradien sich miteinander vertauschen. Wir wissen nun schon, daß die konjugierte Fläche einer Schraubenfläche konstanter positiver Totalkrümmung wieder eine Schraubenfläche ist. Wollen wir aus den Konstanten A, B, C, m einer gegebenen Schraubenfläche diejenigen der konjugierten Fläche nämlich A_1, B_1, C_1 und m_1, ableiten, so müssen wir von den Gleichungen ausgehen:

$$A = \frac{R^2\,(1+N^2)\cos^2\sigma}{(N^2+\cos^2\sigma)^2},\ \text{u. s. w.,} \qquad A_1 = \frac{R^2\,(1-N^2)\sin^2\sigma}{(N^2+\sin^2\sigma)^2},\ \text{u. s. w.}$$

Aus diesen Formelgruppen erhält man durch Elimination von N und σ: $\sqrt{C_1} = \frac{R^2\sqrt{C}}{C+m^2}$, $m_1^2 = \frac{R^4 m^2}{(C+m^2)^2}$. Da auch A_1 und B_1 durch C_1 und m_1 bestimmt sind, so haben wir die Kon-

---

* Bianchi, pag. 489, pag. 490.

stanten der konjugierten Fläche auf diejenigen der gegebenen zurückgeführt. Wenn also zwischen den Konstanten C_1 und C sowie m_1 und m diese Beziehungen bestehen, so sind die beiden entsprechenden Schraubenflächen konstanter positiver Totalkrümmung konjugiert. Dasselbe gilt auch für die beiden Schraubenflächen konstanter mittlerer Krümmung, sofern deren Konstanten C_1 und C sowie m_1 und m durch dieselben Gleichungen miteinander verbunden sind. Für beide Flächenpaare gelten somit sämtliche Sätze, welche die Hazzidakissche Transformation betreffen, insbesondere müssen sich die Schraubenflächen des letzten Paares so aufeinander abwickeln lassen, daß die Krümmungslinien einander entsprechen und die Hauptkrümmungsradien sich miteinander vertauschen.

Die Abwickelbarkeit dieser Flächen folgt leicht aus ihren Linienelementen:

$$\partial s^2 = \frac{4R^2r^2\partial r^2}{[(R+\sqrt{C})^2 - r^2]\,[r^2 - (R-\sqrt{C})^2]} + k^2(r^2+m^2)\,\partial u_1^2,$$

$$\partial s_1^2 = \frac{4R^2r_1^2\partial r_1^2}{[(R+\sqrt{C_1})^2 - r_1^2]\,[r_1^2 - (R-\sqrt{C_1})^2]} + (r_1^2+m_1^2)\,\partial u_1^2.$$

Berücksichtigt man die Gleichungen, denen die Konstanten der konjugierten Flächen genügen, so kann man die Linienelemente gleich machen, wenn man setzt:

$$r_1^2 + m_1^2 = k^2\,(r^2+m^2),\ k^2 = \sqrt{\frac{C_1}{C}}.$$

Mit den Formeln des IX. Abschnittes läßt sich ferner leicht zeigen, daß sich die Hauptkrümmungsradien bei der Verbiegung vertauschen.

Ebenso wie sich die Schraubenflächen konstanter mittlerer Krümmung zu konjugierten Flächenpaaren anordnen, können auch je zwei Rotationsflächen konstanter mittlerer Krümmung bestimmt werden, welche der Hazzidakisschen Transformation genügen. Da in diesem Falle $m = o$ ist, so besteht die Gleichung: $R^2 = \sqrt{C\,.\,C_1}$. Ist also $C > R^2$, so wird $C_1 < R^2$, und umgekehrt. Die Meridiankurven der beiden konjugierten Rotationsflächen besitzen also stets verschiedenen Charakter. Wenn die eine mit der vorher erwähnten Rollkurve der Ellipse identisch ist, so ist die andere die Rollkurve einer Hyperbel. Das trifft zum Beispiel zu für die beiden in diesem Abschnitte angeführten Rotationsflächen, auf welche sich eine Schraubenfläche konstanter mittlerer Krümmung abwickeln läßt. Diese sind im Sinne der Hazzidakisschen Transformation konjugiert.

Abschnitt XI.

Die geodätischen Linien.

Die geodätischen Linien sämtlicher Schraubenflächen lassen sich leicht bestimmen, da letztere zu den Liouvilleschen Flächen gehören. *Als solche bezeichnet man bekanntlich Flächen, deren Linienelement die Form hat: $\partial s^2 = (U+V)\,(\partial u^2 + \partial v^2)$, wo U nur von u, V nur von v abhängt. Für Flächen von diesem Charakter ergibt sich die Gleichung der geodätischen Linien durch bloße Quadraturen:

$$\int \frac{\partial u}{\sqrt{U-a}} - \int \frac{\partial v}{\sqrt{V+a}} = b.$$

Die Bogenlänge der geodätischen Linien ist ebenfalls durch Quadraturen bestimmt:

$$\partial s = \sqrt{U-a}\,.\,\partial u + \sqrt{V+a}\;\partial v.$$

Bezeichnet man ferner mit ϑ den Winkel, den diese Linien mit den Parameterkurven v bilden, so erhält man noch: $U\sin^2\vartheta - V\,.\,\cos^2\vartheta = a$. Diese Integrationsmethode findet nicht nur Anwendung bei den Rotationsflächen, sie kann auch zur Ableitung der geodätischen Linien aller Schraubenflächen dienen. Das Linienelement derselben lautet:

$$\partial s^2 = (1+\varphi'^2(\varrho))\,\partial\varrho^2 + 2m\,\varphi'(\varrho)\,\partial\varrho\,\partial v + (\varrho^2+m^2)\,\partial v^2.$$

* Stahl und Kommerell, pag. 95.

Durch die Substitution $\upsilon = \upsilon_1 - m \cdot \int \frac{\varphi'(\varrho)\, \partial\varrho}{\varrho^2 + m^2}$ geht dasselbe über in:

$$\partial s^2 = \left[1 + \frac{\varrho^2\, \varphi'^2(\varrho)}{\varrho^2 + m^2}\right] \partial\varrho^2 + (\varrho^2 + m^2)\, \partial\upsilon_1^2.$$

Oder: $$\partial s^2 = (\varrho^2 + m^2) \cdot \left[\frac{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}{(\varrho^2 + m^2)^2}\, \partial\varrho^2 + \partial\upsilon_1^2\right].$$

Setzt man: $\frac{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}{(\varrho^2 + m^2)^2}\, \partial\varrho^2 = \partial\varrho_1^2$, so wird $\varrho^2 + m^2$ eine Funktion von ϱ_1. Also $\partial s^2 = f(\varrho_1)\,(\partial\varrho_1^2 + \partial\upsilon_1^2)$. Das ist wieder die Liouvillesche Form des Linienelementes. Ferner wird in unserem Falle $V = o$. Also lautet die Gleichung der geodätischen Linien sämtlicher Schraubenflächen:

$$\int \frac{\partial\varrho_1}{\sqrt{f(\varrho_1) - a}} - \int \frac{\partial\upsilon_1}{\sqrt{a}} = b.$$

Setzt man für υ_1 und ϱ_1 wieder ihre Werte ein, so wird:

$$\upsilon = \sqrt{a} \int \frac{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}}{(\varrho^2 + m^2)\sqrt{\varrho^2 + m^2 - a}}\, \partial\varrho - m \cdot \int \frac{\varphi'(\varrho)}{\varrho^2 + m^2}\, \partial\varrho + C_1.$$

Ebenso $$s = \int \frac{\sqrt{(\varrho^2 + m^2 - a)\,(\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}}{\varrho^2 + m^2}\, \partial\varrho + \sqrt{a} \cdot \upsilon + \sqrt{a}\, m \int \frac{\varphi'(\varrho)\, \partial\varrho}{\varrho^2 + m^2} + C_2.$$

Führt man noch in die letzte Gleichung den für υ berechneten Wert ein, so ergibt sich:

$$s = \int \frac{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}}{\sqrt{\varrho^2 + m^2 - a}}\, \partial\varrho + C_2.$$

Schließlich bleibt noch die Formel: $U \sin^2\vartheta - V \cos^2\vartheta = a$ über, die sich in unserem Falle in die Gleichung $(\varrho^2 + m^2) \sin^2\vartheta = a$ verwandelt. Für $m = o$ geht sie in die bekannte Clairautsche Formel: $\varrho \sin\vartheta =$ konst. über. Läßt man in unseren Gleichungen a unverändert, gibt man aber der Größe C_1 verschiedene Werte, so erhält man offenbar eine Reihe kongruenter Kurven, die durch Drehung um die Achse und durch eine fortschreitende Bewegung parallel der Achse zur Deckung gebracht werden können. *Nach einer Bemerkung, die wir Dini verdanken, bilden die Parameterkurven u und υ einer Fläche, deren Linienelement die Liouvillesche Form besitzt, ein isothermes System von geodätischen Ellipsen und Hyberbeln. Daraus folgt, daß die Schraubenlinien unserer Flächen und ihre orthogonalen Trajektorien ein solches System von geodätischen Ellipsen und Hyperbeln darstellen. Alle diese Resultate gelten noch ganz allgemein für sämtliche Schraubenflächen. Wir wollen nun die Gleichungen spezialisieren, indem wir in diese die für $\varphi'(\varrho)$ und $\psi'(r)$ berechneten Werte einsetzen. Wir erhalten für die erste Flächengattung:

$$\upsilon = \sqrt{a} \int \frac{R\varrho\partial\varrho}{(\varrho^2 + m^2)\sqrt{(C - \varrho^2)(\varrho^2 + m^2 - a)}} \mp m \int \frac{\partial\varrho}{\varrho\,(\varrho^2 + m^2)} \cdot \sqrt{\frac{(\varrho^2 + A)(\varrho^2 - B)}{C - \varrho^2}} + C_1.$$

$$s = \int \frac{R\varrho\partial\varrho}{\sqrt{(C - \varrho^2)(\varrho^2 + m^2 - a)}} + C_2.$$

Für die zweite Flächengattung:

$$u = \sqrt{a} \int \frac{2Rr\, \partial r}{\sqrt{[r^2 + m^2]\,[r^2 + m^2 - a]\,[(R + \sqrt{C})^2 - r^2]\,[r^2 - (R - \sqrt{C})^2]}}$$

$$\pm m \int \frac{r^2 + R^2 - C}{r\sqrt{[r^2 + m^2]\,[(R + \sqrt{C})^2 - r^2]\,[r^2 - (R - \sqrt{C})^2]}} \cdot \partial r + C_1.$$

$$s = \int \frac{2Rr\sqrt{r^2 + m^2}\, \partial r}{\sqrt{[r^2 + m^2 - a]\,[(R + \sqrt{C})^2 - r^2]\,[r^2 - (R - \sqrt{C})^2]}} + C_2.$$

---

* Sopra un problema della rappresentazione geografica di una superficie sopra un'altra. Annali di Matematica, 3. Bd., 1869

Abschnitt XII.

Die Asymptotenlinien und die Minimallinien.

Da die Asymptotenlinien für die Flächen positiver Totalkrümmung imaginär werden, so kommen nur die Schraubenflächen konstanter mittlerer Krümmung in Betracht. Die Gleichung der Asymptotenlinien lautet:

$$D\, dr^2 + 2D'\, dr\, du + D''\, du^2 = 0, \text{ oder}$$

$$r\psi''(r)\, dr^2 - 2m\, dr\, du + r^2\psi'(r)\, du^2 = 0.$$

Daraus erhält man nach einigen Umformungen:

$$u = m\,.\int \frac{\sqrt{(M^2 - r^2)(r^2 - N^2)}}{r\,(r^2 + M\,.\,N)\sqrt{r^2 + m^2}}\, dr \pm 2R \int \frac{r\,dr\sqrt{(r^2 + A + B + m^2)(A + B - m^2 - r^2)}}{(r^2 + M\,.\,N)\sqrt{(r^2 + m^2)(M^2 - r^2)(r^2 - N^2)}} + C'.$$

Man sieht, daß die Kurven nur dann reell werden, wenn $r^2 < A + B - m^2$ ist. Also haben die Asymptotenlinien nur für die Teile unserer Flächen Bedeutung, welche negative Totalkrümmung besitzen. Wie die geodätischen Linien lassen sich auch die Minimallinien allgemein für sämtliche Schraubenflächen ableiten. Das Linienelement derselben lautet:

$$ds^2 = (\varrho^2 + m^2)\left[\frac{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}{(\varrho + m^2)^2}\, d\varrho^2 + dv_1{}^2\right].$$

Um ds^2 durch die Parameter der Minimallinien auszudrücken, bringen wir das Linienelement auf die Form:

$$ds^2 = F\,(u_1\, u_2)\, \frac{R\, du_1}{u_1\sqrt{m^2 + C_1}} \cdot \frac{R\, du_2}{u_2\sqrt{m^2 + C_1}}.$$

Wir setzen darum:

$$-\frac{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}}{\varrho^2 + m^2}\, d\varrho - i\, dv_1 = \frac{R\, du_1}{u_1\sqrt{m^2 + C_1}},$$

$$-\frac{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}}{\varrho^2 + m^2}\, d\varrho + i\, dv_1 = \frac{R\, du_2}{u_2\sqrt{m^2 + C_1}},\quad F\,(u_1,\, u_2) = \varrho^2 + m^2.$$

$$\text{Also } -\int \frac{\sqrt{\varrho^2 + m^2 + \varrho^2\varphi'^2(\varrho)}}{\varrho^2 + m^2}\, d\varrho = \frac{R}{2\sqrt{m^2 + C_1}} \log\,(u_1\,.\,u_2),$$

$$i\, v_1 = \frac{R}{2\sqrt{m^2 + C_1}} \log\left(\frac{u_2}{u_1}\right).$$

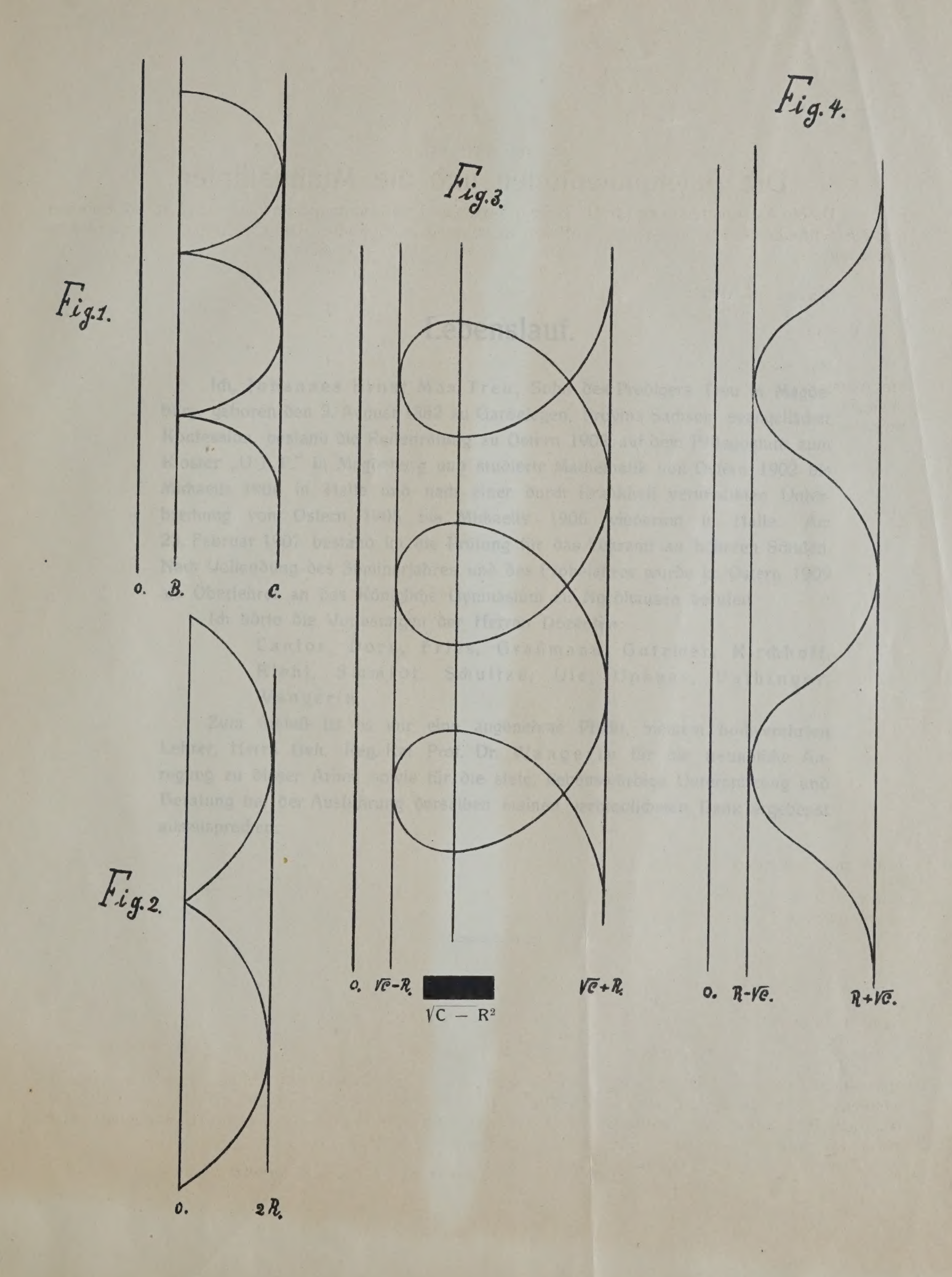
Hiernach sind $u_1\,.\,u_2$ die Schraubenlinien und $\frac{u_2}{u_1}$ die orthogonalen Trajektorien derselben.

Führt man schließlich an Stelle von v_1 wieder $v + m \int \frac{\varphi'(\varrho)\, d\varrho}{\varrho^2 + m^2}$ ein und ersetzt man $\varphi'(\varrho)$ beziehungsweise $\psi'(r)$ durch die schon bekannten Werte, so sind durch die beiden letzten Gleichungen die Minimallinien unserer Flächen bestimmt.

Fehlerberichtigung:

Durch ein Versehen sind leider einige Druckfehler stehen geblieben. So muß es heißen auf Seite 4 »konstanter mittlerer Krümmung« statt »konstanten . . .«, auf Seite 5 »$\frac{\partial X_1}{\partial \tau} = \mp\, dn\tau\,.\,X_3$« statt »$\frac{\partial X_1}{\partial \tau} = \pm\, dn\tau\, X_3$«, ferner »$\frac{\partial X_1}{\partial v} = \mp\, sn\tau\, X_2$« statt »$\frac{\partial X_1}{\partial v} = \mp\, sn\tau\, X_1$«, auf Seite 7 »nun« statt »nnn«, auf den Seiten 6, 7, 8, 9 »$dn^2\tau$« statt »$du^2\tau$«, auf Seite 8 »in welche die alten« statt »in welchen .«, Zeile 2 auf Seite 11 muß heißen: $4Cr^2 -- (r^2 - A + B + m^2)^2 = - r^4 + 2r^2(R^2 + C) - (R^2 - C)^2$. Auf derselben Seite muß »mittlerer« statt »mitterer« gesetzt werden, auf Seite 16 »beliebig« statt »brliebig« und auf derselben Seite muß in der Gleichung

$$x_1 = x - \frac{R}{\cosh\sigma}\,(\sinh\vartheta\,.\,X_1 + i\,\cosh\vartheta\, X_2)\ \vartheta \text{ durch } \vartheta_1 \text{ ersetzt werden.}$$


Fig.1.
0.
B.
C.
Fig.2.
0.
2R.
Fig.3.
0.
√C−R.
[redacted]
√C − R²
√C+R.
Fig.4.
0.
R−√C.
R+√C.